

Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να υπολογισθεί το άθροισμα

$$- 207 - 206 - 205 - 204 - \dots\dots + 196 + 197 + 198 + 199 + 200$$

2. Να υπολογισθούν οι τιμές των παραστάσεων

$$A = (4^2 - 3^2) : 7 + (6,4 - 5) \cdot \frac{20}{4}$$

$$B = 15 \left(1 - \frac{1}{2} : \frac{3}{4} \right) \cdot \left(1 \frac{2}{5} - 1 \right) .$$

και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A^2 + B^2 + A + B + 1 .$$

3. Στο διπλάσιο ενός αριθμού προσθέτουμε το 5 και βρίσκουμε 17.

α) Ποια από τις παρακάτω 4 ισότητες περιγράφει με εξίσωση , την παραπάνω πρόταση ;

$$A. 5.2 + \chi = 17 \quad B. 5 + \chi + 2 = 17 \quad \Gamma. 5\chi + 2 = 17 \quad \Delta. 2\chi + 5 = 17$$

β) Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς επαληθεύει την ισότητα που βρήκατε

$$A. 7 \quad B. 10 \quad \Gamma. 3 \quad \Delta. 6$$

4. Υπολογίστε την τιμή της παρακάτω αριθμητικής παράστασης

όταν $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\gamma = 10$

$$\Pi = \alpha^3 + \beta^3 + 2\gamma^3 - (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) + 3$$

5. Σε μια Βαλκανική συνάντηση Νέων συμμετείχαν 199 παιδιά από 9 διαφορετικές χώρες. Να δικαιολογήσετε το γεγονός ότι τουλάχιστον μία χώρα είχε στην αποστολή της 12 τουλάχιστον παιδιά του ίδιου φύλλου.
(Ε.Μ.Ε. – ΘΑΛΗΣ 2000 – 2001)

6. Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 5 m^2 . Να βρείτε το εμβαδόν ενός άλλου ορθογωνίου που η μία διάστασή του είναι τετραπλάσια της μιας διάστασης που έχει το πρώτο και η άλλη τριπλάσια της άλλης διάστασης του πρώτου.

7. Δύο πόλεις Α και Β απέχουν μεταξύ τους 300 χιλιόμετρα. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την πόλη Α με προορισμό την πόλη Β. Το αυτοκίνητο κινείται με ταχύτητα 90 χιλιομέτρων την ώρα.

Θεωρούμε τον δρόμο που συνδέει τις δύο πόλεις ευθεία.

α) Να κάνετε έναν άξονα ώστε η πόλη Α να είναι η αρχή του. Μονάδα του άξονα να θεωρήσετε τα 30 χιλιόμετρα. Πάνω στον άξονα να τοποθετήσετε την πόλη Β.

β) Να σημειώσετε πάνω στον άξονα τις θέσεις του αυτοκινήτου κάθε μία ώρα.

γ) Να υπολογίσετε με την βοήθεια του άξονα το χρόνο στον οποίο το αυτοκίνητο θα φτάσει στον προορισμό του.

8. Έχουμε 5 κύβους ακμής 3 cm. Να εξετάσετε αν αυτοί χωρούν σε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 9 cm , 5cm , 3 cm.

9. Το παρακάτω σχήμα αποτελείται από ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο . Το τετράγωνο και το ορθογώνιο έχουν το ίδιο εμβαδό, ενώ η μια πλευρά του ορθογωνίου είναι ίση με το μισό της πλευράς του τετραγώνου. Αν το εμβαδό του σχήματος είναι $0,18 \text{ dm}^2$, να υπολογίσετε την περίμετρό του σε cm.



10. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 11. Να υπολογίσετε το άθροισμα του διψήφιου αυτού και του διψήφιου που προέκυψε από την αλλαγή της θέσης των ψηφίων του.

11. Ο Νικήτας έχει υπολογίσει ότι το 2016 θα έχει διπλάσια ηλικία από αυτή που έχει το 2003. Να υπολογίσετε το έτος της γέννησής του.
12. Σ' ένα σχολικό έρανο μαζεύτηκαν 360 βιβλία , 540 τετράδια και 900 στυλό για τα παιδιά μιας σεισμόπληκτης περιοχής της . Να βρεθεί
- 1) πόσα το πολύ ομοιόμορφα δέματα μπορούν να γίνουν και
 - 2) πόσα βιβλία, πόσα τετράδια και πόσα στυλό θα έχει το κάθε δέμα;
13. Κάποια μέρα του 1968 ένας νεαρός αρχαιολόγος ανακάλυψε στο Σούνιο τα αγάλματα ενός θεού και μιας θεάς του Ολύμπου. Πολλαπλασιάζοντας το μισό της ηλικίας του με τον αριθμό των γραμμάτων του θεού και με τον αριθμό των γραμμάτων της θεάς και αυτό το γινόμενο με τον αριθμό της ημερομηνίας που έγινε η ανακάλυψη, βρήκε ότι το γινόμενο των τεσσάρων αυτών πρώτων παραγόντων ήταν ο αριθμός 5655. Να βρείτε για ποιους θεούς πρόκειται. Ποια ημερομηνία έγινε η ανακάλυψη και πόσων χρονών είναι ο αρχαιολόγος.
14. Αν από τον αριθμό 63 αφαιρέσουμε το 7 και στο αποτέλεσμα προσθέσουμε το 7 και στη συνέχεια διαιρέσουμε με το 7 και τέλος πολλαπλασιάσουμε με το 7 ποιόν αριθμό θα βρούμε ;
15. Ο γυμναστής ενός σχολείου μας βάζει τους μαθητές σε τριάδες μετά σε τετράδες και τέλος σε εξάδες .Σε κάθε περίπτωση του περισσεύουν 2 μαθητές . Αν οι μαθητές του σχολείου είναι περίπου 100 , να βρεθεί πόσοι ακριβώς είναι οι μαθητές .
16. Αν A_1 είναι η τιμή της παράστασης $A = 2\chi^3 - 3\chi^2 + \chi + 1$ όταν $\chi = 1$ και B_1 η τιμή της παράστασης $B = 3\chi^3 - 4\chi + 1$ όταν $\chi = 2$ να συγκρίνετε τους αριθμούς A_1 και B_1 .
17. Ένα βαρέλι άδειο κατά 40% περιέχει 40 λίτρα περισσότερο από ότι θα περιείχε αν ήταν γεμάτο κατά 40% . Να βρεθεί πόσα λίτρα χωράει το βαρέλι ;

286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

18. 5 πορτοκαλάδες και 3 τυρόπιτες κοστίζουν 9,5 ευρώ , ενώ 3 πορτοκαλάδες και 5 τυρόπιτες κοστίζουν 10,5 ευρώ .Να βρεθεί πόσο κοστίζει η μία πορτοκαλάδα και η μία τυρόπιτα .

19. Ποιος είναι ο αριθμός του οποίου το 40% είναι ο αριθμός 200 ;

20. Ρωτήσαμε τον Μαθηματικό μας για την ηλικία του και η απάντηση του ήταν η εξής : «Φέτος είμαι χ ετών γιατί γεννήθηκα το έτος $1900 + \chi$ » .Ποια είναι η ηλικία του ;

21. Αν $\alpha = 5^2 - 2^3 \cdot 3$, $\beta = 7^2 - 6 \cdot 2$ και $\gamma = 10^2 - 3^2 \cdot 5 \cdot 2$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \alpha^{2007} + \beta^{20} \cdot (3,8\gamma - 6^2) + \gamma^3 \cdot 0,001$.

22. Αν $\alpha^2 = 2^2 - 1$ να βρεθούν οι αριθμοί $\beta = 2\alpha - \frac{\alpha}{4}$, $\gamma = 2(\alpha + \beta) - \alpha^2$,

$3\delta = (3\alpha + 6\beta) : 13$.

23. Αν η εξίσωση $2\alpha\chi + \alpha = 10$ έχει λύση το $\chi = 2$, να βρεθεί ο αριθμός α .

24. Αν ο Αλέξανδρος ήταν 36 χρονών και 7 μηνών και 2 εβδομάδων πριν από 1105 ημέρες , τότε να βρεθεί

1) ποια θα είναι η ηλικία του σήμερα

2) μετά από πόσο χρόνο θα είναι 50 χρονών ;

25. Από ένα σημείο Ο υπάρχουν 3 ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ στο ίδιο επίπεδο. Αν οι τρεις γωνίες ΑΟΒ ,ΒΟΓ και ΓΟΑ είναι ίσες, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η κάθε μία γωνία. Αν προεκτείνουμε την ΑΟ, η προέκταση της ΟΔ χωρίζει την γωνία ΒΟΓ σε δύο γωνίες. Να αποδείξετε ότι η ΟΔ διχοτομεί την ΒΟΓ.

26. Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με

$$\hat{A} = 90^\circ , \hat{B} = 25^\circ , \hat{\Gamma} = 65^\circ$$

$$\hat{\Delta} = 90^\circ , \hat{E} = 40^\circ , \hat{Z} = 50^\circ$$

286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

Να φέρετε τις διχοτόμους των γωνιών Β και Γ που τέμνονται στο σημείο Μ και τις διχοτόμους των γωνιών Ε και Ζ που τέμνονται στο σημείο Ν. Να υπολογίσετε τις γωνίες ΒΜΓ και ΕΝΖ. Τι παρατηρείτε;

27. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 60^\circ$ και $\hat{G} = 30^\circ$. Αν ΑΗ είναι το ύψος και ΑΜ η διάμεσος του, να εξετάσετε αν η ΑΗ και η ΑΜ τριχοτομούν την γωνία Α.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου.

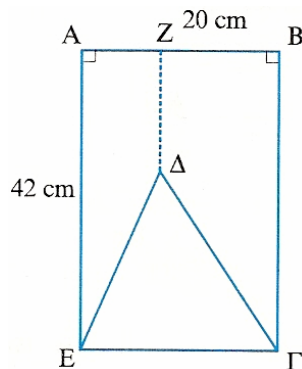
β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τετραπλεύρου.

28. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς 5 cm και $\hat{A} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε το μήκος της μικρότερης διαγωνίου του ΒΔ.

29. Αν η περίμετρος ορθογώνιου τριγώνου είναι 39 cm, η υποτείνουσά του 16 cm και η μία κάθετη πλευρά του κατά 3 cm μεγαλύτερη από την άλλη, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

30. Παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν τριγώνου πλευράς 1,2 dm. Αν η βάση του είναι 1,6 dm, τότε να βρεθεί το προς αυτήν ύψος του παραλληλογράμμου

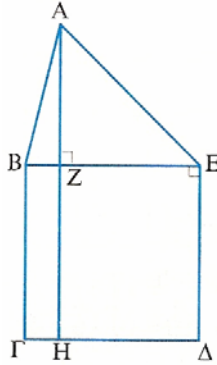
31. Να βρεθεί το εμβαδόν του παρακάτω σχήματος ΑΖΒΓΔΕ, αν $AB = 20$ cm,



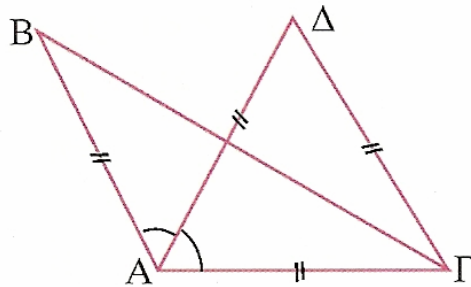
286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

$$AE = 42 \text{ cm και } \Delta Z = \frac{3}{7} AE .$$

32. Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο $BPG\Delta$ έχει εμβαδόν 342 mm και είναι $AH = 2B\Gamma$. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας $AB\Gamma\Delta E$.

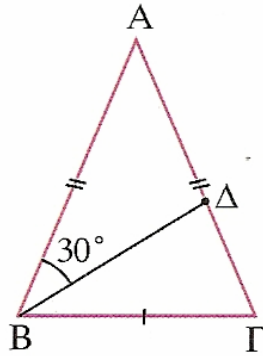


33. Σε αμβλυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



34. Αν η πλευρά του $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $BA\Gamma$, να εξετάσετε αν η ΓB είναι διχοτόμος της γωνίας $A\Gamma\Delta$

35. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρνουμε την $B\Delta$ έτσι ώστε $B\Delta = B\Gamma$.



36. Αν $\hat{A}B\Delta = 30^\circ$ να βρεθεί η γωνία A του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ.

37. Έχουμε μία κορδέλα 157 m και θέλουμε να φτιάξουμε με αυτήν τους 5 Ολυμπιακούς κύκλους.



Να βρεθεί πόσο μήκος θα έχει η ακτίνα του κάθε κύκλου;

38. Ένας Ιταλός φίλαθλος ζήτησε από έναν Έλληνα ξενοδόχο να του δίνει για κάθε μέρα διαμονής στο ξενοδοχείο του, ένα κρίκο από την χρυσή «Ολυμπιακή αλυσίδα» που διέθετε.



Ο ξενοδόχος του είπε ότι θα τον δεχθεί για 5 διανυκτερεύσεις κατά την διάρκεια των Ολυμπιακών αγώνων και θα του δώσει και 40 € που

αντιπροσωπεύουν το 10% την αξία της αλυσίδας, αν καταφέρει να του δίνει κάθε μέρα διαμονής από ένα κρίκο, κόβοντας **μόνο** τον ένα από τους τρεις μεσαίους κρίκους της αλυσίδας. Ποιον από τους 5 κρίκους πρέπει να κόψει και ποια είναι η αξία της αλυσίδας;

39. Αν σε ένα δοχείο που είναι γεμάτο κατά το $\frac{1}{3}$ με πετρέλαιο, προσθέσουμε άλλα 5 λίτρα πετρέλαιο τότε το δοχείο θα είναι μισογεμάτο. Να βρεθεί πόσα λίτρα πετρέλαιο χωράει το δοχείο;

40. Ένας παππούς μοίρασε την περιουσία του στα τρία εγγόνια του ως εξής : Στο πρώτο εγγόνι του έδωσε το $\frac{1}{2}$ της περιουσίας του, στο δεύτερο τα μισά του πρώτου και στο τρίτο εγγόνι του το $\frac{1}{5}$ απ' όσα πήραν οι δύο άλλοι μαζί. Τα υπόλοιπα 10.000 € τα άφησε σ' ένα κοινωφελές ίδρυμα. Να βρεθεί πόσα ήταν τα χρήματα που μοίρασε ο παππούς και πόσα πήρε ο καθένας εγγονός του .

41. Ένας αθλητής καταναλώνει σ' ένα χρόνο 456,250 lt γάλα. Κάθε 73 ημέρες καταναλώνει 365 ποτήρια. Να βρείτε πόσα ml γάλα περιέχει το κάθε ποτήρι;

42. Σε μια έρευνα που έγινε στην χώρα μας για τη διατροφή των παιδιών βρέθηκε ότι τα 40% αυτών είναι παχύσαρκα. Απ' αυτά το 27% είχε υψηλή χοληστερίνη και ζάχαρο. Να βρεθεί το ποσοστό των παιδιών που έχουν χοληστερίνη και ζάχαρο στην χώρα μας.

43. Μια αγελάδα ανήκει σε δύο βοσκούς. Μια μέρα πάνε να την αρμέξουν, παίρνοντας μαζί τους ένα δοχείο των 10 kg, ένα των 7 kg κι ένα των 3 kg. Μετά το άρμεγμα συγκέντρωσαν 10 kg γάλα στο δοχείο των 10 kg. Όμως, εκτός απ' τα δοχεία δεν είχαν τίποτα για να μοιράσουν το γάλα. Πώς θα χρησιμοποιήσουν τα δοχεία ώστε να μοιράσουν το γάλα εξίσου (τοποθετώντας 5 kg στο δοχείο των 10 kg και 5 kg στο δοχείο των 7 kg) .

286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

44. Ένα σαλιγκάρι θέλει να φτάσει στην κορυφή ενός δέντρου 16 m. Την ημέρα ανεβαίνει 4 m και την νύχτα κατεβαίνει 2 m. Σε πόσες ημέρες θα φτάσει στην κορυφή;

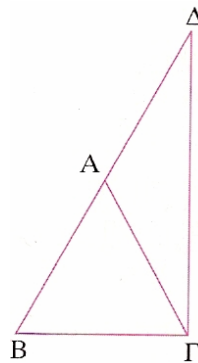
45. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 50^\circ$.

α) να βρεθούν οι γωνίες B και Γ

β) να φέρετε τις διχοτόμους OB και $O\Gamma$ των γωνιών αυτών και να βρείτε τις γωνίες και το είδος του τριγώνου $O\beta\Gamma$.

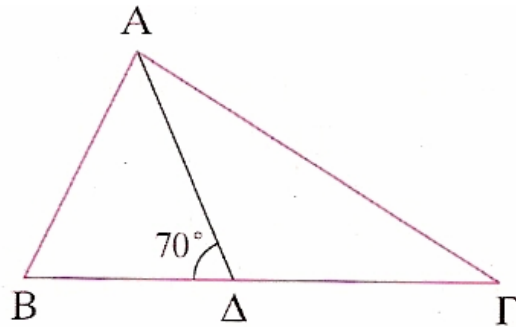
46. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 40^\circ$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το μέρος του A και παίρνουμε τμήμα $A\Delta = AB$.

Στη συνέχεια φέρουμε την $\Gamma\Delta$.



Να βρεθούν οι γωνίες των τριγώνων $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$, $\Gamma B A$ και το είδος τριγώνου $\Gamma B \Delta$.

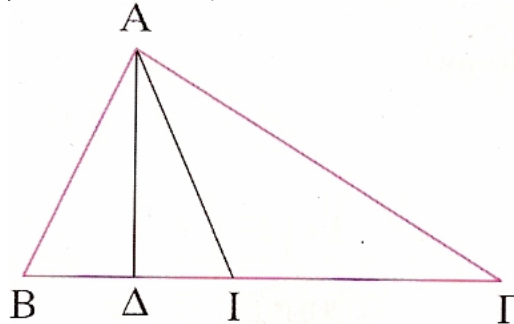
47. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Αν η διχοτόμος $A\Delta$ της γωνίας $B A \Gamma$ σχηματίζει με την πλευρά $B\Gamma$ γωνία $A\Delta B = 70^\circ$, τότε να



βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ και το είδος του τριγώνου $AB\Delta$.

48. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 50^\circ$. Με την βοήθεια του διαβήτη παίρνουμε πάνω στην $A\Gamma$ σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = AB$. Να βρεθούν οι γωνίες των τριγώνων $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$.

49. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 70^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 50^\circ$. Φέρουμε τη διχοτόμο AI της γωνίας A και το ύψος AD του τριγώνου που αντιστοιχεί στην πλευρά $B\Gamma$.



Να βρείτε πόσων είναι η γωνία BAI .

50. Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου έχει μήκος διπλάσιο από το πλάτος του. Εάν η περίμετρος του οικοπέδου είναι 300 m, να βρεθούν οι διαστάσεις του και το εμβαδόν του.

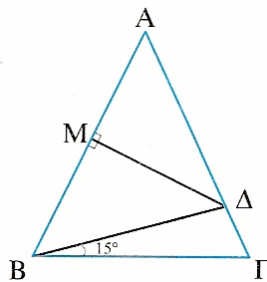
51. Μία αίθουσα σχήματος ορθογωνίου παραλληλόγραμμου έχει μήκος 6 m και πλάτος 4,5 m. Η αίθουσα πρόκειται να στρωθεί με πλακίδια σχήματος τετραγώνου πλευράς 30 cm. Να βρεθεί πόσα πλακίδια θα χρειαστούν προκειμένου να στρωθεί με πλακίδια η αίθουσα

52. Ένας έμπορος πούλησε το εμπόρευμα με κέρδος 12% επί της αξίας της αγοράς και εισέπραξε 6720 €. Να βρεθεί η αξία της αγοράς του εμπορεύματος και πόσο θα κέρδιζε αν πουλούσε το εμπόρευμα με κέρδος 8%.

53. Ένας έμπορος όταν ερωτήθηκε για το ποσοστό του κέρδους του απάντησε ότι κερδίζει 20% επί της τιμής πωλήσεως. Να βρεθεί πόσο κερδίζει επί της τιμής της αγοράς.

54. Ένας ρόμβος έχει περίμετρο 32 cm και εμβαδόν μεγαλύτερο από 60 cm^2 . Εάν ένα τετράγωνο έχει ίση περίμετρο με τον ρόμβο, να βρεθούν οι ακέραιες τιμές που μπορεί να πάρει το εμβαδόν του ρόμβου.

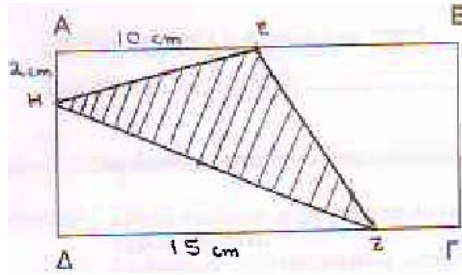
55. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρνουμε την μεσοκάθετο $M\Delta$ στην



πλευρά AB που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Αν $\widehat{GB\Delta} = 15^\circ$ να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

56. Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο με $AB = 20 \text{ cm}$, $A\Delta = 10 \text{ cm}$, $AE = 10 \text{ cm}$, $AH = 2 \text{ cm}$ και $\Delta Z = 15 \text{ cm}$. Να βρεθεί το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.

286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης



57. Να γράψετε με τη μορφή μιας δύναμης τις παρακάτω παραστάσεις:

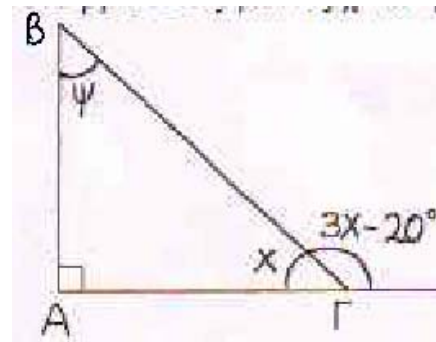
α) $x^4 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot x$

β) $(2^5 \cdot 4^3 \cdot 16) : 8$

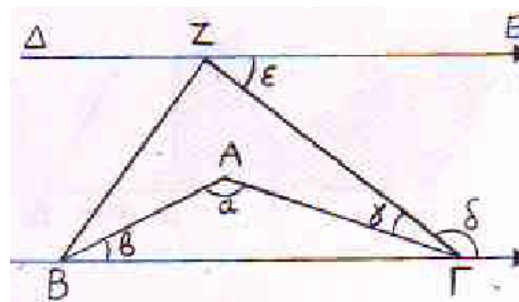
58. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 70^\circ$ και $\hat{B} = 50^\circ$. Να βρεθούν οι γωνίες $A_{εξ}$ και $\Gamma_{εξ}$.

59. Αν $x = 5$ και $y = 3$, να υπολογίσετε την $\sqrt{x^2 - y^2}$.

60. Να βρείτε τις γωνίες x και ψ του διπλανού τριγώνου.

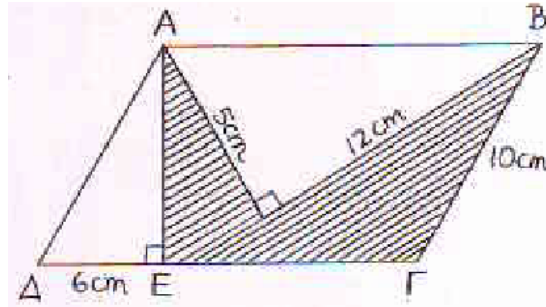


61. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$, $BZ \perp \Gamma Z$, BA διχοτόμος της γωνίας



ΓBZ , ΓA διχοτόμος της γωνίας $\text{B}\hat{\Gamma}\text{Z}$ και $\text{B}\hat{\text{Z}}\Delta = 40^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες α , β , γ , δ και ϵ .

62. Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $\text{AB}\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Να βρείτε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.



63. Να μετατρέψετε τα σύνθετα κλάσματα σε απλά :

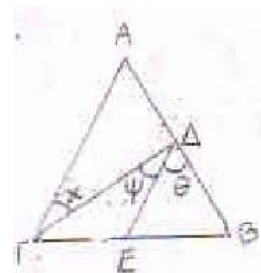
α) $\frac{2\frac{8}{9}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$

β) $\frac{2\frac{2}{5} - 1\frac{1}{3}}{\left(\frac{3}{10} + \frac{3}{5}\right)} : 3\frac{3}{4}$.

64. Αν $\alpha = 3$ και $\beta = 5$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$K = 3\alpha^3 - 2(\alpha + \beta) + (\beta^5)^0 - 7 \cdot 1^\alpha.$$

65. Στο διπλανό σχήμα είναι $\text{AB} = \text{A}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ διχοτόμος της γωνίας Γ , $\Delta\text{E} \parallel \text{A}\Gamma$ και $\hat{\text{A}} = 70^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες B , χ , ψ , ω και θ .



286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

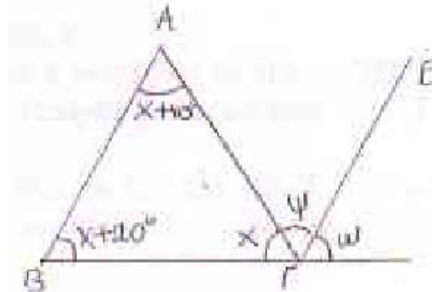
66. Να υπολογίσετε το χ στις παρακάτω ισότητες :

α) $(5^2)^x \cdot 5^{10} = 5^{20}$

β) $3^{16} \cdot 9^x = 27^2$

67. Στο διπλανό σχήμα είναι $ΓΕ \parallel ΑΒ$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες χ , ψ και ω .



68. Αν $3\chi - \psi = 10$, να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων :

α) $3\chi + 30 - \psi$

β) $9\chi - 3\psi + 100$

69. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$. Να βρείτε τις γωνίες α , β , γ και δ .



70. Να γίνουν οι πράξεις :

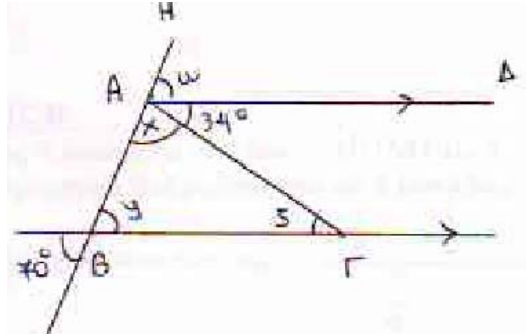
$$\frac{2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} - \frac{2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}}$$

71. Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 3$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

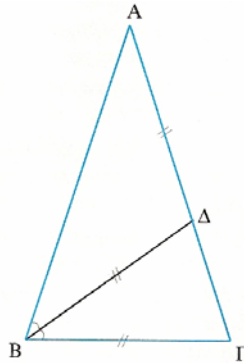
$$\beta^3 - 3\beta^2\alpha + 3\beta\alpha^2 - \alpha^3.$$

286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

72. Στο παρακάτω σχήμα είναι $AD \parallel BG$. Να υπολογίσετε τις γωνίες χ , ψ , ω .



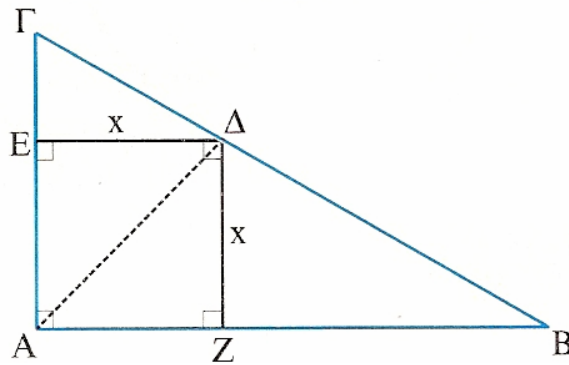
73. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) τέτοιο ώστε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 2\hat{A}$. Να εξηγήσετε γιατί



αν φέρουμε την διχοτόμο $B\Delta$ της γωνίας B , θα είναι $B\Gamma = B\Delta = \Delta A$.

74. Σ' ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = 10$ cm και το αντίστοιχο ύψος ΔE προς αυτήν είναι 3 cm. Το ύψος ΔZ προς την πλευρά $B\Gamma$ είναι 5 cm. Να βρεθεί η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

75. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6$ cm και $A\Gamma = 3$ cm. Να βρεθεί

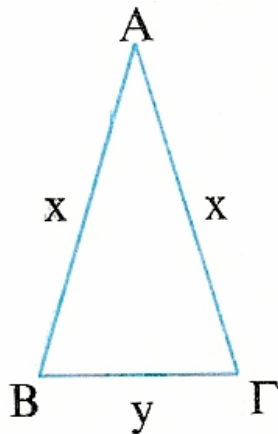


- α) το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ
β) η πλευρά του τετραγώνου AZΔΕ
γ) η αριθμητική τιμή της παράστασης $A = 2[\chi(\chi^2+1)]^3+\chi-1$.

76. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($A = 90^\circ$) με $AB = 12 \text{ cm}$, $AG = 5 \text{ cm}$ και ύψος $A\Delta = \frac{60}{13} \text{ cm}$. Να εξετάσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ και η περίμετρος του εκφράζονται με τον ίδιο αριθμό.

77. Να βρεθεί το 300% του αριθμού $\frac{2,5}{3}$.

78. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$) με περίμετρο $\Pi = 34 \text{ cm}$.



286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

1) να γράψετε την έκφραση της πλευράς $BΓ = ψ$ με την βοήθεια της μεταβλητής $χ$.

Π) Αν δίνεται ότι η $χ = 12 \text{ cm}$, να βρείτε την πλευρά $ψ$.

79. Αν $ψ = 22$ και για τα γράμματα $α, β, χ$ ισχύουν:

1) $ψ = χ + 9$

2) $2χ + (α + 2) = χ + ψ + 1$

3) $ψ + (χ + β) = α + 17$

α) να βρείτε τους αριθμούς $α, β, χ$

β) να βάλετε το κατάλληλο σύμβολο της ανισότητας μεταξύ των γραμμάτων $α, β, χ, ψ$.

80. Δίνεται η εξίσωση $α(3χ-1) + 3(χ + 5) = 41$. Αν η εξίσωση έχει λύση το $χ = 2$, τότε να βρείτε τον αριθμό $α$.

81. Δίνεται ότι $EΚΠ.(6,χ) = 18$, να βρείτε το φυσικό αριθμό $χ$.

82. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $K=α^3-13α^2+ 44α$ όταν $α = 1$, $α = 2^2$ και $α = 2^3$. Τι παρατηρείτε ;

83. Να βρεθούν τα ψηφία $α$ και $β$ στον αριθμό $7αβ$, έτσι ώστε ο αριθμός να διαιρείται με το 10.

84. Αν οι $α, β, γ$ είναι φυσικοί αριθμοί και ο αριθμός $β$ είναι άρτιος να εξετάσετε αν ο αριθμός $A = 12α + 3β + 18γ$ διαιρείται με το 6.

85. Αν $ν$ είναι φυσικός αριθμός, να βρείτε:

1) όλα τα υπόλοιπα των διαιρέσεων του $ν$ δια του αριθμού 6.

2) τους φυσικούς αριθμούς $ν$, οι οποίοι διαιρούνται με το 6 δίνουν πηλίκο 5.

86. Δύο νησιά A και B απέχουν από το λιμάνι του Πειραιά αποστάσεις 11 Km και 5,6 ναυτικών μιλίων αντίστοιχα. Να βρεθεί ποιο νησί απέχει περισσότερο από το λιμάνι;

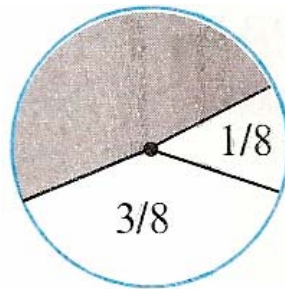
87. Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να σημειώσετε τα σημεία Α (1,1), Β (3,1), Γ (3,4) και Δ (1,4). Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται.

88. Ένας κύβος έχει ακμή 4 cm. Να βρείτε:

1) τον όγκο V_1 του κύβου.

2) τον όγκο V_2 , ενός κύβου που έχει ακμή διπλάσια του προηγούμενου κύβου.

89. Να γράψετε το ποσοστό που εκφράζει το χρωματισμένο μέρος του σχήματος.



90. Τρεις μικρές κουταλιές περιέχουν 30 ml ενός φαρμάκου.

α) να βρείτε πόσες κουταλιές είναι τα 120 ml του φαρμάκου

β) πόσες μέρες θα χρειαστούν για να καταναλώσουμε φάρμακο 240 ml, αν η ημερήσια δόση είναι 6 κουταλιές;

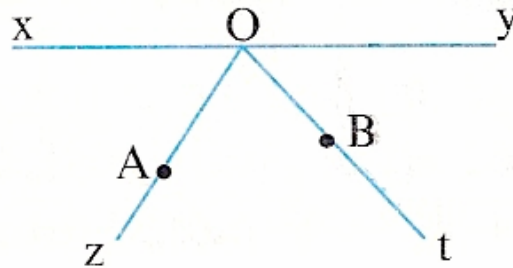
91. Ένα αντικείμενο είναι σχεδιασμένο σε δύο σχέδια, στο σχέδιο (Σ_1) με κλίμακα $\frac{1}{30}$ και στο σχέδιο (Σ_2) με κλίμακα $\frac{1}{50}$. Στο σχέδιο (Σ_1) το αντικείμενο έχει μήκος 4,5 cm. Πόσο είναι το μήκος του αντικειμένου στο σχέδιο (Σ_2);

92. Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει η ισότητα $\frac{3\alpha + 2\beta}{5\alpha - \beta} = \frac{3}{2}$.

1) να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι ανάλογοι των αριθμών 7, 9 αντίστοιχα

2) αν $\alpha + \beta = 48$ να υπολογίσετε τους αριθμούς α , β .

93. Στο παρακάτω σχήμα να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα, τις ευθείες καθώς και τις ημιευθείες που ορίζονται.



Να γράψετε επίσης όλα τα ζεύγη των αντικείμενων ημιευθειών.

94. Σ' ένα κύκλο (O, K) οι ακτίνες OA και OB σχηματίζουν γωνία 60° .

α) να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη στα σημεία A και B τις εφαπτόμενες AD και BD (D σημείο τομής των εφαπτόμενων)

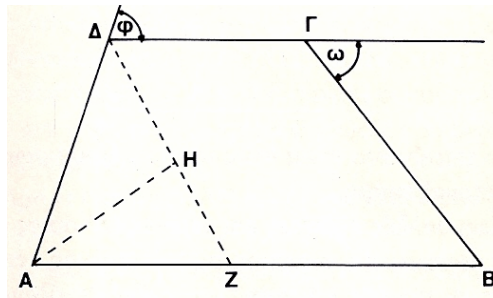
β) να εξετάσετε τι τρίγωνα είναι τα OAB , ΔAB .

γ) να υπολογίσετε σε μοίρες την γωνία BDA .

δ) να αποδείξετε ότι η OD είναι διχοτόμος των γωνιών AOB και $A\Delta B$ και ότι είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος AB .

95. Ενός τραπεζίου το εμβαδόν του ισούται με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 18 cm . Αν η μεγάλη βάση του τραπεζίου είναι μεγαλύτερη της μικρής βάσης του κατά 8 cm και το ύψος του είναι 12 cm , να βρείτε τις βάσεις του τραπεζίου.

96. Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$. Αν $\varphi = 60^\circ$ και $\omega = 50^\circ$, τότε



- α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου.
β) αν ΔΖ και ΑΗ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών Δ και Α, τότε να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΖΔ και τη θέση των ευθυγράμμων τμημάτων ΔΖ και ΑΗ.

97. Δίνεται γωνία $\chi\text{O}\psi$ και δύο σημεία Α και Β πάνω στην πλευρά της Οχ.

- α) να βρείτε ένα σημείο Γ της ευθείας Οχ τέτοιο ώστε $\Gamma\text{A} = \Gamma\text{B}$
β) τι πρέπει να ισχύει για να μην υπάρχει τέτοιο σημείο;

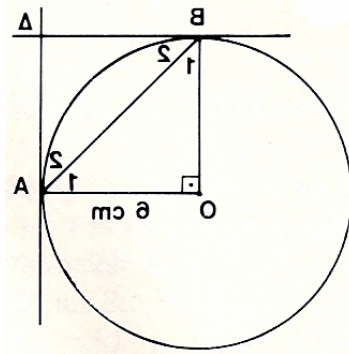
98. Δυο γωνίες είναι εφεξής και παραπληρωματικές και διαφέρουν κατά 72° .

- 1) να βρεθούν οι γωνίες και
- 2) να βρεθεί η γωνία των διχοτόμων τους
- 3) τι είδους γωνία σχηματίζουν οι διχοτόμοι των γωνιών αυτών;

99. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με περίμετρο 60 cm και κάθετες πλευρές $\text{AB} = 15 \text{ cm}$ και $\text{ΑΓ} = 20 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε

- α) την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου
- β) το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ
- γ) το ύψος ΑΔ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

100. Δίνεται κύκλος (Ο, 6 cm) και οι κάθετες ακτίνες του ΟΑ και ΟΒ. Στα σημεία Α και Β φέρνω τις εφαπτόμενες του κύκλου που τέμνονται στο σημείο Δ. Να βρείτε :



- α) τι είδους τρίγωνα είναι ως προς τις πλευρές τους είναι τα OAB και $AΔB$
β) ποια είναι η θέση των ευθειών OB και $AΔ$ μεταξύ τους
γ) τι είδους τετράπλευρο είναι το $OABΔ$ και να υπολογίσετε το εμβαδόν του
δ) να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα $OΔ$ και AB .

101. Σ' ένα τρίγωνο η γωνία A είναι τετραπλάσια της γωνίας B και η γωνία $Γ$ είναι μεγαλύτερη από την B κατά 18° . Να υπολογίσετε

- 1) τις γωνίες του τριγώνου $ABΓ$ σε μοίρες και σε μέρη ορθής.
- 2) τη γωνία που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των γωνιών B και $Γ$

102. Η περίμετρος ενός παραλληλογράμμου είναι 42 cm και το εμβαδόν του είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 8 cm . Αν η μία βάση του είναι 5 cm , τότε να βρεθούν τα δυο ύψη του παραλληλογράμμου.

103. Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο η μικρή του βάση είναι ίση με καθεμία από τις μη παράλληλες πλευρές του και η περίμετρος του είναι 26 cm . Αν η μεγάλη βάση του τραπέζιου είναι 11 cm και το εμβαδόν του 32 cm^2 , τότε να βρεθεί το ύψος του τραπέζιου.

104. Σε ένα παραλληλόγραμμο η μία του βάση είναι διπλάσια από την άλλη. Αν το ύψος που αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη βάση του είναι $u_1 = 12\text{ cm}$, τότε να βρεθεί το ύψος u_2 που αντιστοιχεί στη μικρή του βάση.

105. Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι ίση με τη μικρή διαγώνιο ενός ρόμβου. Αν η μεγάλη διαγώνιος του ρόμβου είναι διπλάσια από τη μικρή διαγώνιο, τότε να συγκρίνετε τα εμβαδά του τετραγώνου και του ρόμβου.

106. Η μεγάλη βάση ενός τραπεζίου είναι τριπλάσια από τη μικρή βάση. Αν το εμβαδόν του είναι 24 cm^2 και το ύψος του είναι 3 cm , τότε να βρεθούν οι βάσεις του τραπεζίου.

107. Το εμβαδόν ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 60 cm^2 και το ύψος του που αντιστοιχεί στη βάση είναι 12 cm . Αν η περίμετρος του είναι 36 cm , τότε να βρεθούν τα μήκη της βάσης και των ίσων πλευρών του τριγώνου.

108. Τρεις φίλοι θέλουν να μοιραστούν 100 ευρώ έτσι ώστε ο πρώτος να πάρει 10 ευρώ περισσότερο από το δεύτερο και το μερίδιο του δεύτερου να είναι τα $\frac{2}{5}$ του μεριδίου του τρίτου.

109. Σε ένα τρίγωνο μια γωνία του είναι 78° . Να βρεθούν οι άλλες δύο γωνίες του αν η μία είναι διπλάσια της άλλης.

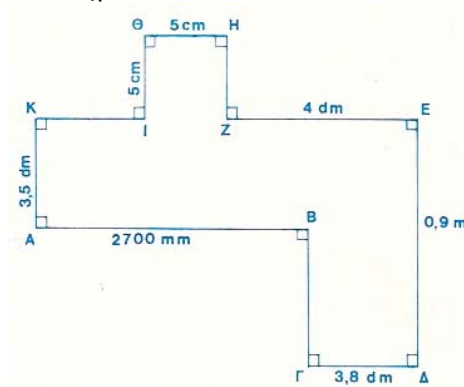
110. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 64^\circ$. Αν η γωνία A είναι τα $\frac{8}{7}$ της γωνίας B , τότε να υπολογίσετε τη γωνία Γ .

111. Να υπολογίσετε τις γωνίες ενός τριγώνου $AB\Gamma$ αν γνωρίζετε ότι οι γωνίες B και Γ είναι μεγαλύτερες από την γωνία A κατά 12° και 18° αντίστοιχα.

112. Να υπολογίσετε τις γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου αν γνωρίζετε ότι η γωνία της κορυφής του είναι τριπλάσια καθεμιάς των ίσων γωνιών του τριγώνου.

113. Να υπολογίσετε το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου.

114. Δίνεται το παρακάτω σχήμα



Να υπολογισθούν

- οι πλευρές ΒΓ, ΖΗ, ΙΚ με την ίδια μονάδα μέτρησης
- η περίμετρος του σχήματος και
- το εμβαδόν του σχήματος

115. Αν $\chi = (8,3 + 1,7) : 0,4$ και $\psi = (14 - 7,75) \cdot 1,6$

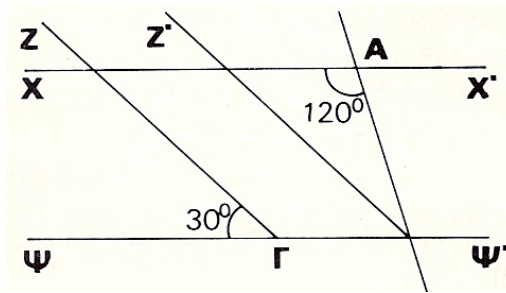
- να υπολογιστούν τα χ και ψ .
- να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \chi^2 - \psi^2$, όπου χ, ψ οι τιμές που βρήκατε στο α' ερώτημα.

116. Τέσσερα πλοία αναχωρούν από τον Πειραιά για τέσσερα διαφορετικά νησιά. Το πρώτο πλοίο για να πάει στον προορισμό του και να επιστρέψει χρειάζεται 3 ώρες. Το δεύτερο 4 ώρες. Το τρίτο 6 ώρες και το τέταρτο 8 ώρες. Αν αναχωρήσουν συγχρόνως από τον Πειραιά, τότε να βρείτε

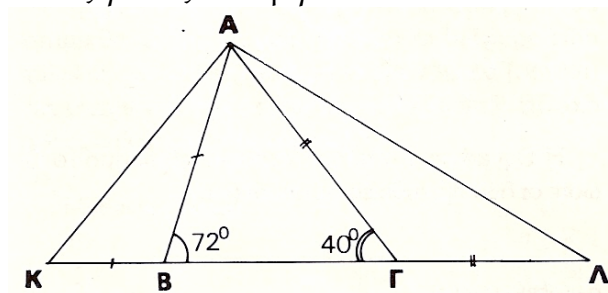
- μετά από πόσες ώρες τουλάχιστον θα ξανασυναντηθούν στον Πειραιά
- πόσα δρομολόγια θα κάνει το κάθε πλοίο.

286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

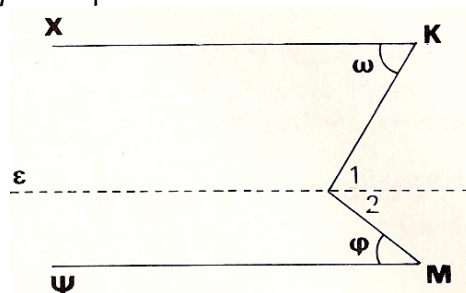
117. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\chi\chi' \parallel \psi\psi'$. Αν η Bz' είναι διχοτόμος της γωνίας $AB\psi$, τότε να δείξετε ότι $Bz' \parallel \Gamma z$.



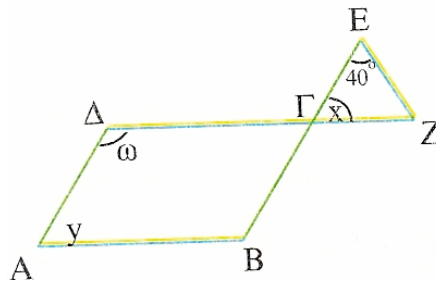
118. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{B} = 72^\circ$, $\hat{\Gamma} = 40^\circ$, $AB = BK$ και $A\Gamma = \Gamma\Lambda$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AK\Lambda$.



119. Στο παρακάτω σχήμα είναι $K\chi \parallel M\psi$, $\hat{K\Lambda M} = 90^\circ$ και $\omega = 55^\circ$. Να υπολογίσετε τη γωνία φ .



120. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το ισοσκελές

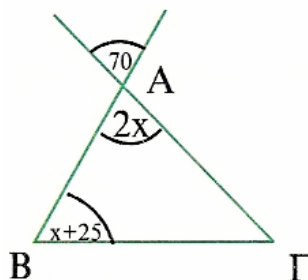


τρίγωνο ΓΕΖ ($EG = EZ$). Αν η $\hat{E} = 40^\circ$, να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών χ , ψ , ω .

121. Ένα MP3 player κοστίζει 58 ευρώ και επί πλέον επιβαρύνεται με 6% Φ.Π.Α.. Αν μας γίνεται έκπτωση 20% , τότε να βρεθεί πόσα χρήματα θα μας επιστραφούν αν δώσουμε ένα χαρτονόμισμα των 100 ευρώ;

122. Σε ισοσκελές τραπέζιο η κάθε μία από τις ίσες πλευρές του είναι 10 cm και το εμβαδόν του 96 cm^2 . Αν η μεγάλη βάση του είναι τριπλάσια από τη μικρή βάση και το ύψος του είναι 8 cm , τότε να βρεθεί η περίμετρος του.

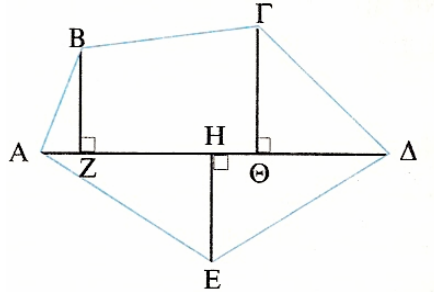
123. Στο παρακάτω σχήμα να βρεθεί ο άγνωστος χ και στη συνέχεια να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



124. Σε ένα τραπέζιο η μεγάλη βάση είναι διπλάσια της μικρής και το ύψος του είναι ίσο με το $\frac{1}{3}$ της μεγάλης βάσης. Αν η μεγάλη βάση είναι 18 cm , τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπέζιου.

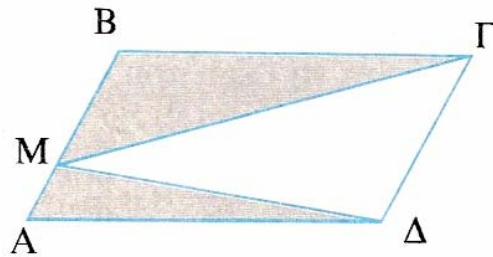
286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

125. Στο παρακάτω σχήμα είναι $A\Delta = 138 \text{ cm}$, $BZ = 41 \text{ cm}$, $E\Theta = 43 \text{ cm}$, $\Gamma\Theta = 50 \text{ cm}$, $AZ = 16 \text{ cm}$, $A\text{H} = 68 \text{ cm}$ και $A\Theta = 36 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχήματος $AB\Gamma\Delta E$.

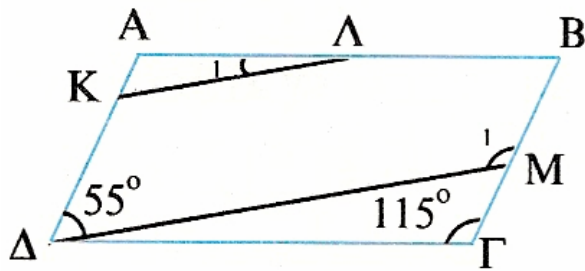


126. Το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 24 cm^2 και τα δύο ύψη του από τις κορυφές B και Γ είναι 6 cm και 8 cm αντίστοιχα. Να βρείτε τα μήκη των αντίστοιχων πλευρών .

127. Στο παρακάτω σχήμα να δικαιολογήσετε γιατί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta M\Gamma$.

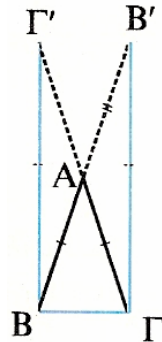


128. Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $K\Lambda \parallel \Delta M$, $\widehat{M\Gamma\Delta} = 115^\circ$ και $\widehat{M\Delta K} = 55^\circ$. Να υπολογίσετε :



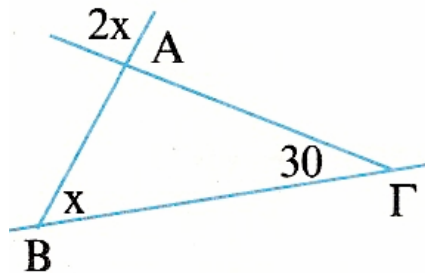
- 1) τις γωνίες A, B, Δ του παραλληλογράμμου ABΓΔ.
- 2) τις γωνίες Λ₁ και Μ₁.

129. Στο παρακάτω σχήμα $AΓ' = AB'$, $AB = AΓ$ και $BΓ' = ΓB'$. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα $Γ'BΓ$ και $B'BΓ$ είναι ίσα.

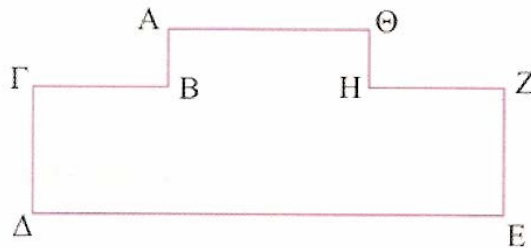


Στη συνέχεια να γράψετε τις αντίστοιχες πλευρές και γωνίες των δύο αυτών τριγώνων.

130. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παρακάτω σχήματος.



131. Στο οικόπεδο που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα είναι $A\Theta = 10$ m, $AB = \Theta H = 4$ m και $B\Gamma = \Gamma\Delta = EZ = ZH = 8$ m.



Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του οικοπέδου.

132. Ο αριθμός $100 + \chi$ όταν διαιρεθεί με το 5 δίνει πηλίκο 100 και υπόλοιπο τον 2. Να βρεθεί ο αριθμός χ .

133. Αν $\alpha = 40:5 + 3 \cdot 3^2 - 2 - 3^2 + 3^3 - 4 - 2$ και $\beta = (3 + 4)^2 - (2 \cdot 7 - 4) + 2 - (3^2 - 2^3)^{15} + 2^2$ να λυθεί η εξίσωση $\chi + \alpha + \beta = 2006$

134. Αν $\alpha = (3^2 - 2^3) - (3 + 2 \cdot 3)$ και $\beta = 2 \cdot (4 - 2)^3 : 2^3 + (5 - 2^2) : (3 - 2)$.

- 1) να εξετάσετε αν είναι $\beta^2 = \alpha$
- 2) να βρεθεί ο Μ.Κ.Δ (α, β).

135. Να συμπληρώσετε τα κενά στους παρακάτω αριθμούς

- 1) $5 _ 8$ ώστε να διαιρείται με το 3
- 2) $4 _ 8 _$ ώστε να διαιρείται με το 5 και με το 9 .

136. Σε σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία B είναι τετραπλάσια της γωνίας A και η γωνία Γ είναι πενταπλάσια της γωνίας A . Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

137. Έστω $\alpha = \text{ΕΚΠ}(3,4)$ και $\beta = \text{ΜΚΔ}(6,9)$

A) να υπολογισθούν τα α, β

B) να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = \alpha + (2^\beta + 4\beta) : 2^2 - 24 : \alpha$

138. Έστω $\alpha = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) : 1\frac{1}{2} - \frac{3}{2}$

- α) να βρεθεί ο αριθμός α
β) να βρεθεί ο αντίστροφος του α

139. Αν $A = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{3}$ και $B = 4 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης
 $M = 6A + B^2$.

140. Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει μήκος 16 cm . Να βρείτε τη θέση του σημείου

Γ του ευθυγράμμου τμήματος AB , ώστε για τα μήκη των ΑΓ και ΓΒ να ισχύει $\frac{1}{5}ΑΓ = \frac{1}{3}ΓΒ$.

141. Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ = 7 cm . Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου η κορυφή Α να απέχει από την πλευρά ΒΓ απόσταση 4 cm. Πόσα τέτοια τρίγωνα υπάρχουν;

142. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 7 cm.

- 1) Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το σημείο Α απόσταση ίση με 4 cm.
- 2) Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που απέχουν από το σημείο Β απόσταση ίση με 5 cm.
- 3) Να βρείτε τα σημεία του επιπέδου που απέχουν ταυτόχρονα 4 cm από το σημείο Α και 5 cm από το σημείο Β.

143. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και μία ευθεία ε η οποία να τέμνει τον κύκλο .

- 1) Να σχεδιάσετε μία ευθεία ϵ_1 , που να εφάπτεται του κύκλου και να είναι παράλληλη στην ευθεία ε.
- 2) Αν Α είναι το σημείο επαφής της ευθείας ε με τον κύκλο και Β και Γ δύο σημεία της ευθείας ϵ_1 τέτοια ώστε $ΑΒ = ΑΓ$, τότε να δείξετε ότι $ΟΒ = ΟΓ$.

286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

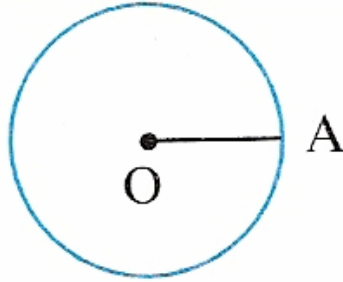
144. Επί μιας ευθείας ϵ παίρνουμε διαδοχικά τα τμήματα $AB = 3 \text{ cm}$, $B\Gamma = 8 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 3 \text{ cm}$.

1) να φέρετε την μεσοκάθετο του τμήματος $B\Gamma$

2) αν K τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, να δείξετε ότι $\widehat{KB\Gamma} = \widehat{K\Gamma B}$.

3) να δείξετε ότι $\widehat{K\Delta\Delta} = \widehat{K\Delta A}$.

145. Στο παρακάτω σχήμα να σχεδιάσετε δύο εφαπτόμενες που είναι



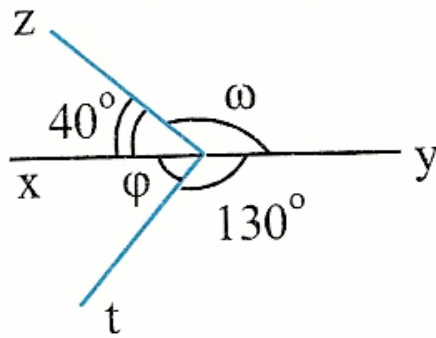
1) κάθετες στην ακτίνα OA

2) παράλληλες στην ακτίνα OA .

146. Να κατασκευάσετε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ το οποίο να έχει $B\Gamma = 5 \text{ cm}$, $\widehat{B} = 60^\circ$ και ύψος $A\Delta = 4 \text{ cm}$.

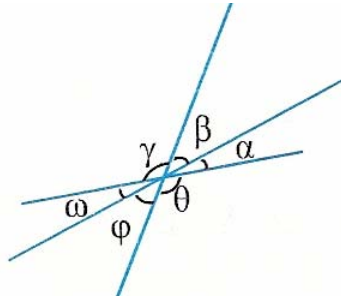
147. Να κατασκευάσετε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ το οποίο να έχει $AB = 8 \text{ cm}$, $A\Delta = 5 \text{ cm}$ και $\widehat{A} = 45^\circ$.

148. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ .



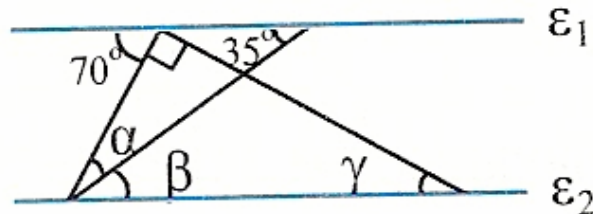
Στη συνέχεια να δικαιολογήσετε γιατί $Oz \perp Ot$.

149. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παρακάτω σχήματος αν τα μέτρα γωνιών α, β, γ είναι

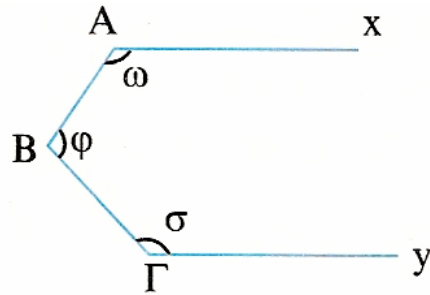


ανάλογα των αριθμών 1,3,5 αντίστοιχα.

150. Στο παρακάτω σχήμα αν είναι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$, τότε να υπολογίσετε τις γωνίες α, β, γ .

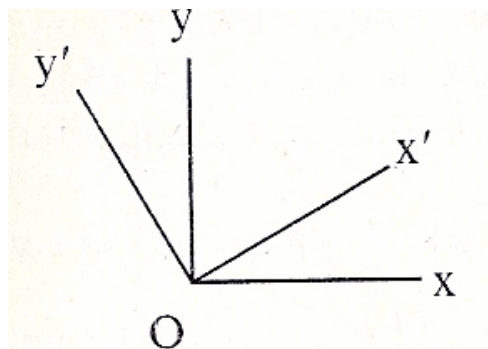


151. Στο παρακάτω σχήμα αν είναι $A\chi \parallel \Gamma\psi$, τότε να δείξετε ότι $\omega + \varphi + \sigma = 360^\circ$.



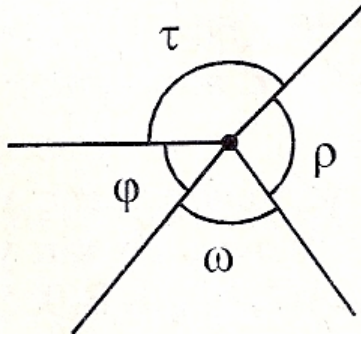
152. Πάνω στην ημιευθεία Ox παίρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $OA = 8\text{cm}$ και $OB = 1,4\text{dm}$. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB και του OM , όπου M το μέσο του AB .
153. Αν δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές και η μία είναι τετραπλάσια της άλλης, τότε να βρεθούν οι γωνίες αυτές.
154. Αν δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές και η μία είναι κατά 18° μικρότερη από την άλλη, τότε να βρεθούν οι γωνίες αυτές.
155. Αν δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές και η μία είναι κατά $42^\circ 20'$ μικρότερη από την άλλη, τότε να βρεθούν οι γωνίες αυτές.
156. Αν δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές και η μία είναι κατά 12° μεγαλύτερη από το δεκαπλάσιο της άλλης, τότε να βρεθούν οι γωνίες αυτές.
157. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{xOy} = 90^\circ$ και $\hat{x'Oy'} = 90^\circ$. Να συγκριθούν οι

γωνίες $\hat{xOx'}$ και

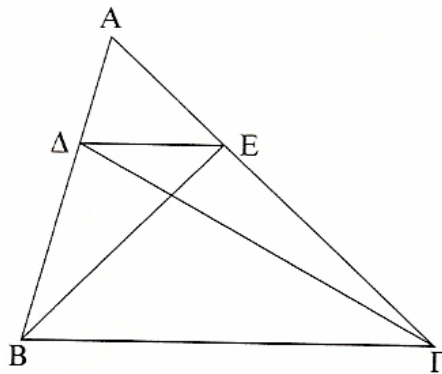


$\hat{yOy'}$.

158. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varphi = 2\chi$, $\omega = 3\chi$, $\rho = 4\chi$ και $\tau = 6\chi - 15^\circ$. Να υπολογιστούν οι γωνίες φ , ω , ρ και τ .



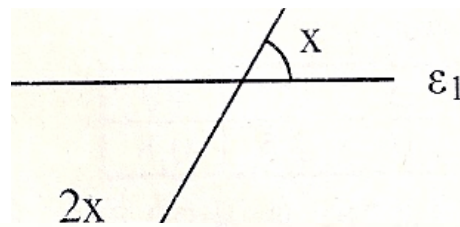
159. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$. Να δείξετε ότι:



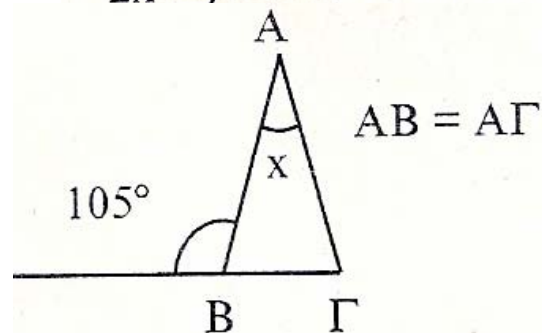
- 1) τα τρίγωνα $\Delta B\Gamma$ και $E B\Gamma$ είναι ισοδύναμα.
- 2) τα τρίγωνα $A E B$ και $A \Delta \Gamma$ είναι ισοδύναμα.

160. Να βρείτε τη γωνία χ σε κάθε περίπτωση :

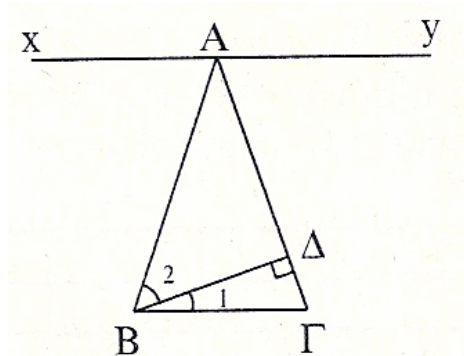
α)



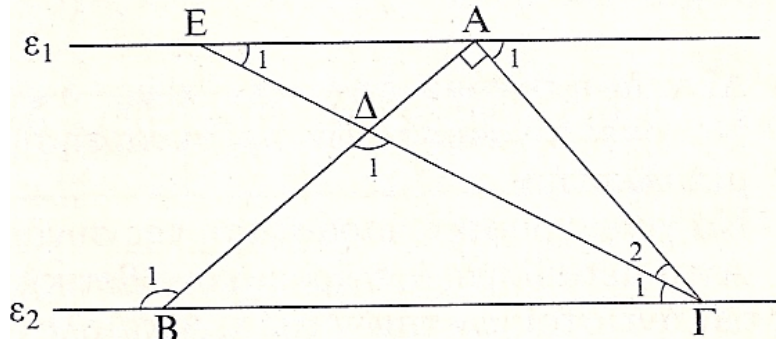
β)



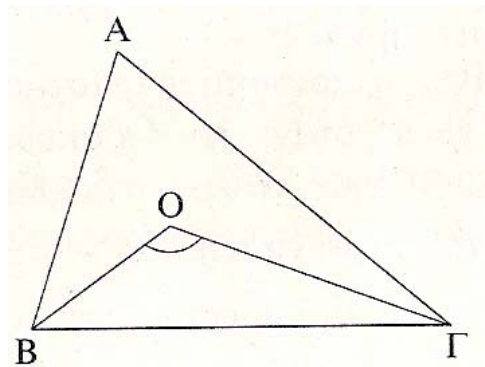
161. Αν $\chi\psi \parallel \text{ΒΓ}$, $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$, $\text{ΒΔ} \perp \text{ΑΓ}$, $\hat{\text{Α}} = 38^\circ$, να βρείτε τις γωνίες Γ , Β , Β_2 και $\psi\text{ΑΓ}$.



162. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$, $\hat{\text{Β}}_1 = 140^\circ$, $\hat{\Delta}_1 = 4\hat{\Gamma}_1$ και $\text{ΒΑ} \perp \text{ΑΓ}$. Να βρείτε τις γωνίες Δ_1 , Α_1 και Γ_2 .



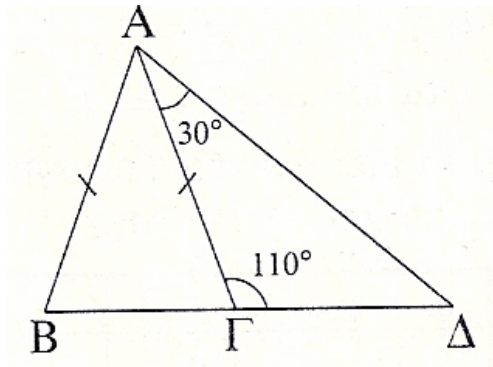
163. Στο παρακάτω σχήμα η ΟΓ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ , η ΟΒ διχοτόμος της



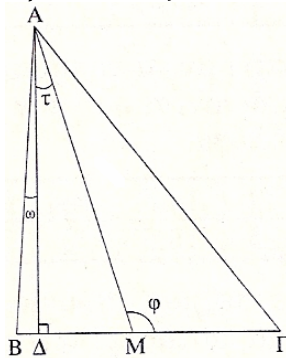
286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

γωνίας B και $\hat{A} = 68^\circ$. Να βρείτε τη γωνία $BO\Gamma$.

164. Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB = A\Gamma$, $\hat{A}_1 = 30^\circ$ και $\hat{\Gamma}_1 = 110^\circ$. Να βρείτε τις γωνίες Δ και B .

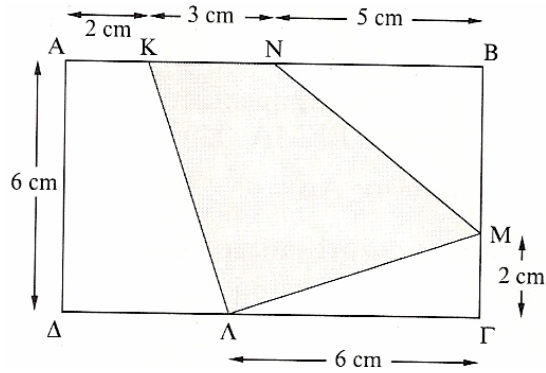


165. Στο παρακάτω σχήμα είναι $A\Delta$ ύψος, AM διχοτόμος της γωνίας $BA\Gamma$, $\hat{B} = 86^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 52^\circ$. Να βρείτε τις γωνίες ω , φ και τ .

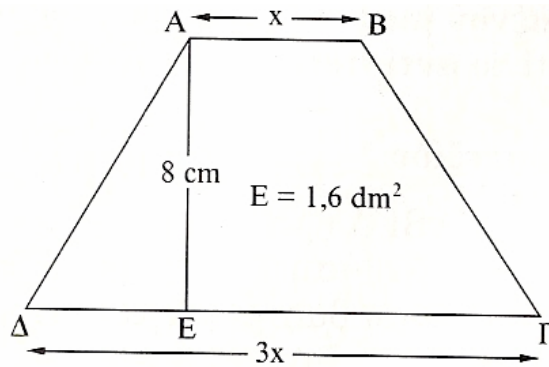


166. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος $KAMN$.

286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

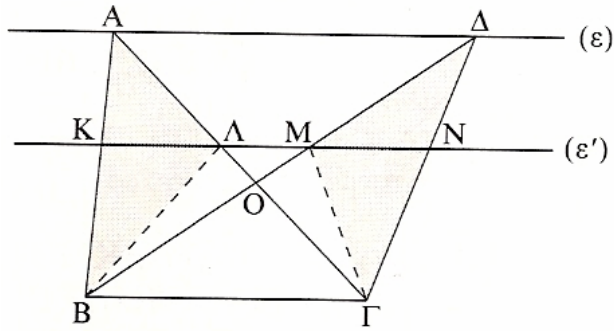


167. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) τέτοιο ώστε η μεγάλη βάση του είναι τριπλάσια της μικρής. Αν το εμβαδόν του είναι ίσο με $1,6 \text{ dm}^2$ και το ύψος του είναι ίσο με 8 cm , τότε



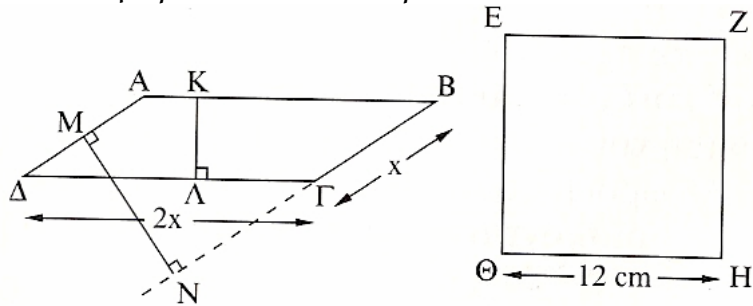
να υπολογίσετε τις βάσεις του τραπέζιου.

168. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες ϵ και ϵ' είναι παράλληλες στη $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι



- 1) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ είναι ισοδύναμα,
- 2) τα τρίγωνα $\Lambda B\Gamma$ και $M B\Gamma$ είναι ισοδύναμα.
- 3) τα τρίγωνα $A\Lambda B$ και $\Delta M\Gamma$ είναι ισοδύναμα.

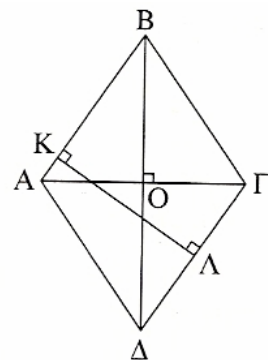
169. Το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και το τετράγωνο $EZH\Theta$ του παρακάτω σχήματος έχουν την ίδια περίμετρο και το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι το μισό του τετραγώνου. Να υπολογίσετε:



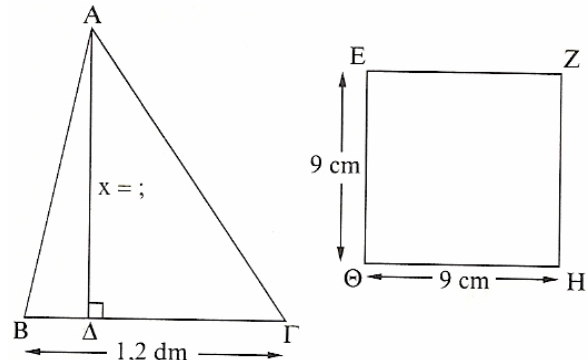
- α) τις πλευρές του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
- β) τα ύψη KL και MN του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

170. Στο διπλανό σχήμα η μικρή διαγώνιος του ρόμβου $AB\Gamma\Delta$, είναι $A\Gamma = 6\text{ cm}$, η περίμετρος του είναι 20 cm και το εμβαδόν του είναι $E = 24\text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε :

- α) τη διαγώνιο του $B\Delta$
- β) την απόσταση των απέναντι πλευρών του $K\Lambda$.

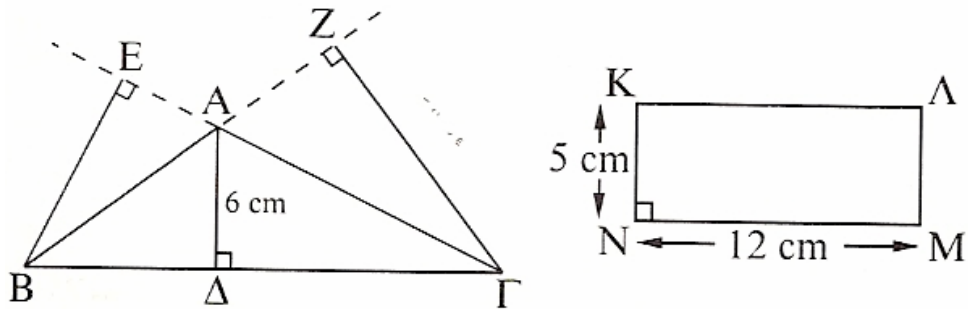


171. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ και το τετράγωνο $EZH\Theta$ είναι ισοδύναμα.



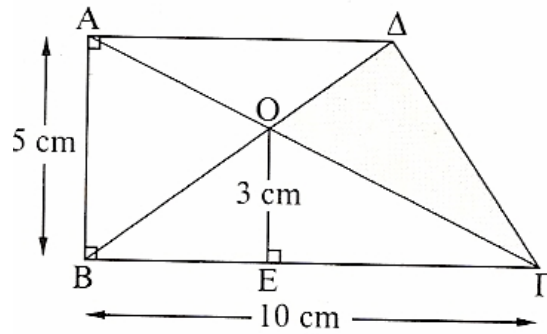
Να βρείτε το ύψος $A\Delta = x$, του τριγώνου $AB\Gamma$.

172. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $K\Lambda MN$ είναι ισοδύναμα.



Να υπολογιστούν οι πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$.

173. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τριγώνου $\Gamma O\Delta$.



174. Το διπλάσιο της ηλικίας του Νίκου και το τριπλάσιο της ηλικίας της Ουρανίας είναι 80 έτη . Μετά από 5 χρόνια πόσο θα έχει γίνει το προηγούμενο άθροισμα ;

175. Αν α , β είναι ο μικρότερος και ο μεγαλύτερος αντιστοίχως τριψήφιος αριθμός με ψηφία διαφορετικά ανά δύο , τότε να βρεθεί το άθροισμα $\alpha + 2\beta$.

176. Αν n είναι φυσικός αριθμός και $\alpha = 2n + 5$, $\beta = n$ και $\alpha - \beta = 10$, να βρεθεί ο αριθμός n .

177. Ένα τετράγωνο πλευράς 12 cm έχει διπλάσια περίμετρο από ένα ισόπλευρο τρίγωνο . Να βρεθεί το μήκος της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου .

178. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και O το σημείο τομής των διαγωνίων του.

Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τριγώνων

α) $AB\Delta$ και $AB\Gamma$

β) $AO\Delta$ και $BO\Gamma$.

179. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E ένα τυχαίο σημείο πάνω στην πλευρά $\Gamma\Delta$. Να συγκρίνετε το εμβαδόν του τριγώνου EAB με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

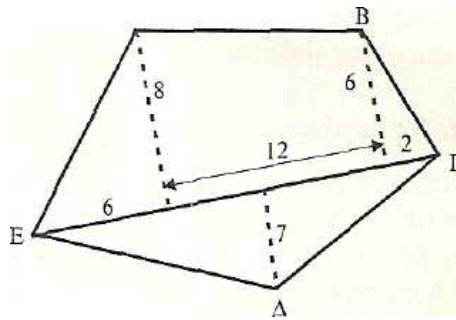
180. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και AM η διάμεσος του και BE η διάμεσος του τριγώνου ABM . Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα εμβαδά των τριγώνων
α) ABM και $AB\Gamma$
β) BEM και $AB\Gamma$.

181. Το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι 120 cm^2 και το ύψος του 8 cm . Να υπολογίσετε τις βάσεις του αν γνωρίζετε ότι η μία βάση είναι διπλάσια της άλλης.

182. Μια αυλή έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 20 m και 10 m . Θέλουμε να τη στρώσουμε με τετραγωνικές πλάκες πλευράς $0,2 \text{ m}$ αξίας 280 δρχ. η κάθε μια. Να υπολογίσετε :

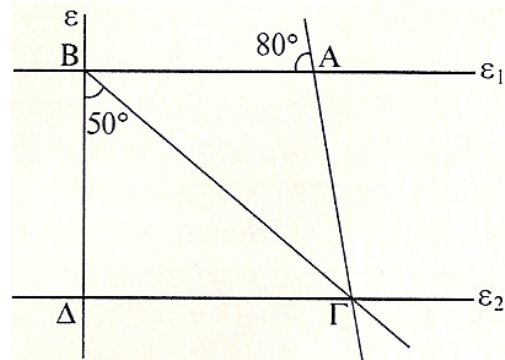
α) Το εμβαδόν της αυλής
β) Τον αριθμό των πλακών που θα χρειαστούν για το στρώσιμο και τα χρήματα που θα πληρώσουμε.

183. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το εμβαδόν του πενταγώνου $AB\Gamma\Delta E$.



184. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και η είναι κάθετη στις ε_1 και ε_2 . Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

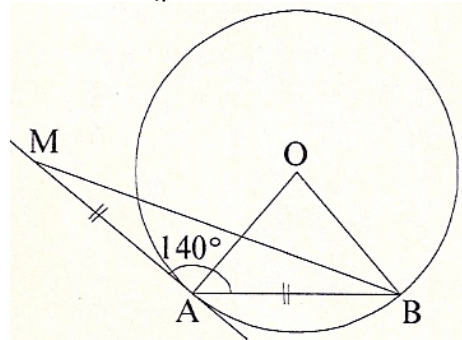
286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης



185. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 40^\circ$. Φέρουμε τη διχοτόμο $B\Delta$ και την κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Γ που τέμνει την προέκταση της $B\Delta$ στο σημείο E . Να υπολογιστούν :

- 1) οι γωνίες του τριγώνου $B\Delta\Gamma$
- 2) οι γωνίες του τριγώνου $B\Gamma E$.

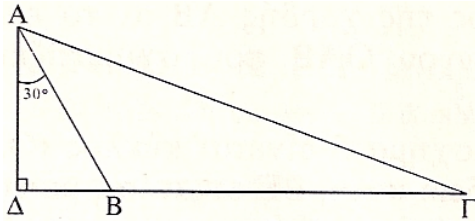
186. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Φέρω μια χορδή του AB και την εφαπτομένη του στο σημείο A .



Επί της εφαπτομένης παίρνουμε σημείο M τέτοιο ώστε $AB = AM$ και $\hat{BAM} = 140^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων AOB και ABM .

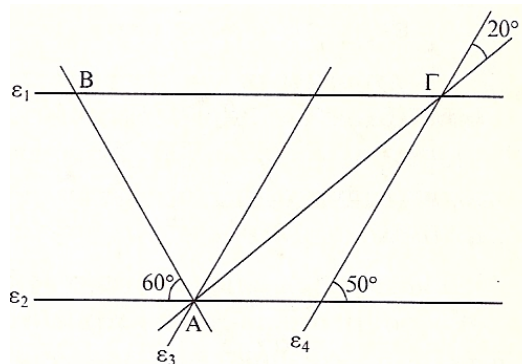
187. Στο παρακάτω σχήμα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία Γ είναι το μισό της γωνίας A .

286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης



Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

188. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$ και $\epsilon_3 \parallel \epsilon_4$. Να υπολογισθούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



189. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$. Φέρουμε τη μεσοκάθετο της πλευράς ΒΓ που τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Δ και την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ν. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΝΔ και ΓΝΔ είναι ίσα.

190. Σε ένα παραλληλόγραμμο η μια βάση του είναι το μισό της άλλης και η περίμετρος του είναι ίση με την περίμετρο ενός τετραγώνου που έχει πλευρά 3 cm. Αν το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι 16 cm^2 να βρεθούν τα ύψη του.

191. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου το εμβαδόν είναι 21 cm^2 . Αν η πλευρά του ΒΓ είναι διπλάσια από την πλευρά ΑΓ, η ΑΒ είναι κατά 20 cm μεγαλύτερη από την ΑΓ και η περίμετρος του είναι 18 cm, τότε να βρεθούν οι πλευρές και τα ύψη του.

192. Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο οι ίσες πλευρές του είναι 5 cm , η περίμετρος του είναι 30 cm και η μια από τις βάσεις του είναι κατά 5 cm μεγαλύτερη από το διπλάσιο της άλλης. Αν το ύψος του είναι 6 cm , τότε να βρεθεί το εμβαδόν του.

193. α) Πότε ένας αριθμός διαιρείται με το 2, με το 3, με το 5, με το 9;
β) Ποιος από τους αριθμούς 1845 και 4020 διαιρείται με το 2, με το 3, με το 5, με το 9;

194. α) Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\frac{8}{x} = \frac{2}{3} \text{ και } \frac{3\psi - 15}{7} = 0 .$$

β) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης

$A = \psi^3 - 3\chi + (\chi - \psi)^2 - (\chi + \psi)(\chi - \psi)$, όπου χ, ψ είναι οι λύσεις των παραπάνω εξισώσεων.

195. Ένας υπάλληλος ξοδεύει για τη διατροφή του το $\frac{1}{3}$ του μισθού του. Τα χρήματα που πληρώνει για ενοίκιο είναι ίσα με τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων που ξοδεύει για τη διατροφή του. Αν του περισσεύουν για τις άλλες του ανάγκες 800 ευρώ, να βρείτε πόσος είναι ο μισθός του;

196. Μια επιχείρηση δημιουργήθηκε από τρεις συνεταίρους που διέθεσαν συνολικά 75.000 ευρώ. Αν ο Α διέθεσε τα $\frac{2}{5}$ του ποσού, ο Β διέθεσε $\frac{1}{20}$ λιγότερα από τον Α και ο Γ τα υπόλοιπα , τότε να βρεθούν τα κέρδη του καθενός στο τέλος του πρώτου εξαμήνου αν αυτά συνολικά είναι 25.000 ευρώ.

197. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 50^\circ$ και η γωνία Α είναι μεγαλύτερη της Γ κατά 30° . Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου και να χαρακτηρίσετε το είδος του, ως προς τις γωνίες του και ως προς τις πλευρές του.

198. Η εταιρεία παραγωγής κρασιού «Άμπελος» έχει στο οινοποιείο της 4500 λίτρα κρασιού για εμφιάλωση .

α) να βρεθεί πόσα μπουκάλια θα χρειαστούν αν η παραπάνω ποσότητα συσκευαστεί σε μπουκάλια χωρητικότητας 0,75 λίτρων.

β) αν τα μπουκάλια συσκευαστούν σε κουτιά των 20 μπουκαλιών, να βρεθεί πόσα κουτιά θα χρειαστούν.

199. α) Μια γωνία ω είναι οκταπλάσια από την παραπληρωματική της.

Να βρεθούν οι γωνίες .

β) Μια γωνία ω αυξημένη κατά 90° ισούται με το διπλάσιο της συμπληρωματικής της. Να βρεθεί η γωνία ω .

200. Αν $\alpha = \frac{2 - \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{3}}$ και $\beta = (3^2 - 2^3)^{2007}$, να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $\beta + \chi = \alpha$ και

β) $\chi - \alpha = \beta$.

201. Αν και στους δύο όρους του κλάσματος $\frac{1}{2}$ προσθέσουμε τον αριθμό 8 , τότε

να βρεθεί κατά πόσο τοις εκατό θα αυξηθεί το κλάσμα .

202. Αν $A = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8}$ και $B = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \frac{7}{6} + \frac{8}{7} + \frac{9}{8}$, να βρεθεί

το άθροισμα τους $A + B$ και η διαφορά τους $A - B$, χωρίς να κάνετε ομώνυμα τα κλάσματα .

203. Αν $\frac{2}{3} \cdot \chi = \frac{4}{5} - \frac{1}{2}$, να βρεθεί ο αντίστροφος του αριθμού χ .

286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

204. Το άθροισμα των περιμέτρων ενός ισοπλεύρου τριγώνου και ενός τετραγώνου είναι 64 cm . Αν η πλευρά του τετραγώνου είναι 10 cm , τότε να βρεθεί το μήκος της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου .

205. Δίνονται οι αριθμοί 5, 10, 20. Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\text{Ε.Κ.Π}}{2} + \frac{50}{\text{Μ.Κ.Δ}} .$$

206. Αν $\alpha = (4^2 - 8) : 2^3 + (8 \cdot 5) \cdot 0,05$ και $\beta = (2 \cdot 3^2 - 4^2) : 2$, να λυθεί η εξίσωση : $\chi + \beta = \alpha$.

207. Αν $\chi + \psi = 6$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 3\chi + 2(\psi + 4) - \chi .$$

208. Ο αριθμός $\chi + 2$ όταν διαιρεθεί με το 3 δίνει ηλίκο 3 και υπόλοιπο 1. Να βρεθεί ο αριθμός χ .

209. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο με περίμετρο 153cm. Αν η βάση του είναι 18cm , να βρεθεί το μήκος κάθε μιας από τις ίσες πλευρές του, στρογγυλοποιημένο στο πλησιέστερο ψηφίο των μονάδων .

210. Να δείξετε ότι ο αριθμός $12\alpha + 9\alpha$ είναι

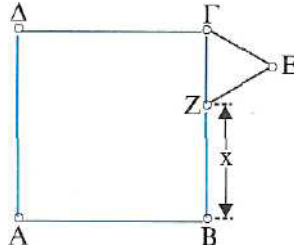
α) πολλαπλάσιο του α και

β) ότι διαιρείται με το 3.

211. Να βρείτε τους αριθμούς χ , ψ από τις ισότητες $5\chi - 4 = 26$ και $2\psi + \chi = 10$ και μετά να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = (\chi^2\psi - \chi\psi^2) : (\chi - \psi) .$$

212. Αν το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει περίμετρο 20 cm και $BZ = \chi$ cm , τότε



α) να εκφράσετε την περίμετρο του ισοπλεύρου τριγώνου ΓΕΖ συναρτήσει του χ

β) να βρείτε το χ , αν η περίμετρος του ισοπλεύρου τριγώνου είναι 6 cm .

213. Στο κλάσμα $\frac{2}{3}$ προσθέτουμε στον αριθμητή τον αριθμό 2 και αφαιρούμε από τον παρονομαστή τον αριθμό 1. Να συγκρίνετε το νέο κλάσμα με το αρχικό.

214. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις :

$$A = 2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \text{ και } B = 3 \cdot \frac{5}{4} + \frac{5}{2} \cdot 3$$

Να υπολογίσετε το $\frac{1}{2}(A + B)$.

215. Αν $\alpha + 3 = 5$ να λυθούν οι εξισώσεις:

$$1) \frac{x - \alpha}{4} = 0 \quad , \quad 2) \frac{x + \alpha}{7} = 1 \quad , \quad 3) \frac{x - \alpha}{4} = 4$$

216. Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στον αντίστροφο του $\frac{5}{3}$ για να βρούμε το κλάσμα $\frac{6}{7}$;

217. α) Να συγκρίνετε τα κλάσματα :

$$\frac{2001}{2002} \text{ και } \frac{2003}{2002}$$

β) ποιο κλάσμα πρέπει να προσθέσουμε στο πρώτο κλάσμα για να βρούμε την μονάδα ;

γ) ποιο κλάσμα πρέπει να αφαιρέσουμε από το δεύτερο κλάσμα για να βρούμε τη μονάδα ;

218. Από τους μη μηδενικούς φυσικούς αριθμούς χ , ψ , ω οι δύο πρώτοι είναι άρτιοι και ο τρίτος περιττός. Αν ισχύει $\chi + \psi + \omega = 7$ να υπολογίσετε τον όγκο :

α) ενός κύβου που έχει ακμή $(\chi + \psi) - \omega$ και

β) ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις χ , ψ , ω .

219. Ένα τραπέζιο έχει μεγάλη βάση $B = 9\text{dm}$, μικρή βάση $\beta = 5\text{dm}$ και ύψος $υ = 600\text{mm}$. Να υπολογίζετε το εμβαδόν E του τραπεζίου. Αν ένα άλλο τραπέζιο έχει βάση μικρή β και ύψος $υ$ ίσο με το ύψος του παραπάνω τραπεζίου, αλλά το εμβαδόν E' του είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν E του πρώτου τραπεζίου, τότε να υπολογίσετε τη μεγάλη βάση B' του νέου τραπεζίου.

220. Αν α , β είναι αντίστροφοι αριθμοί, τότε να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = (\alpha\beta)^{2003} + 2003 \text{ και } B = \alpha\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$$

221. Αν για τους αριθμούς α , β ισχύει ότι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}$, τότε να υπολογίσετε την

τιμή της παράστασης :

$$A = \left(\frac{\alpha + \beta}{\beta}\right) - \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta}\right)^2$$

222. Το βάρος ενός ατόμου ήταν $B_0 = 80$ Kg και υπέστη τρεις διαδοχικές μεταβολές. Στην πρώτη μεταβολή αυξήθηκε κατά 20% και έγινε B_1 . Στη δεύτερη μεταβολή το βάρος B_1 μειώθηκε κατά 10% και έγινε B_2 . Στην τρίτη μεταβολή το βάρος B_2 μειώθηκε και πάλι, και το άτομο επανήλθε στο αρχικό του βάρος B_0 .

α) να βρείτε το βάρος B_1 .

β) να βρείτε το βάρος B_2 .

γ) να βρείτε την μείωση που έγινε στην τρίτη μεταβολή.

δ) να υπολογίσετε το ποσοστό μείωσης της τρίτης μεταβολής.

223. Να βρείτε

α) ένα κλάσμα μεγαλύτερο από το $\frac{1}{3}$ που να έχει αριθμητή το 1.

β) ένα κλάσμα μικρότερο από το 1 που να έχει παρονομαστή το 2.

γ) το άθροισμα, τη διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο των δύο κλασμάτων που βρήκατε στα προηγούμενα ερωτήματα α και β.

224. Το 40% μίας ποσότητας αλεύρου ολικής άλεσης ζυγίζει 60 Kg. Το 60% της ίδιας ποσότητας αλεύρου ζυγίζει:

α) 24 Kg β) 36Kg γ) 100 Kg δ) 90 Kg

225. Για την ανάδειξη δύο μελών ενός συμβουλίου ο Νίκος πήρε το 60% των ψήφων και η Ιωάννα τις υπόλοιπες ψήφους. Αν ο Νίκος εξελέγη με διαφορά 24 ψήφων, τότε το πλήθος των ατόμων που ψήφισαν είναι :

α) 40 β) 24 γ) 120 δ) 90

226. Ένας έμπορος αυξάνει την τιμή ενός προϊόντος κατά 8%. Ένα προϊόν που κόστιζε χ € τώρα θα κοστίζει σε € :

α) 8χ β) $0,8\chi$ γ) $1,8\chi$ δ) $1,08\chi$

227. Μία φωτογραφία έχει διαστάσεις 25x24. Στη συνέχεια μεγεθύνεται και οι διαστάσεις της γίνονται 25x30. Το ποσοστό μείωσης που απαιτείται για να

επανεέλθει το εμβαδόν της φωτογραφίας στην αρχική του τιμή είναι :

- α) 20% β) 60% γ) 40% δ) 25%

228. Η αρχική τιμή ενός προϊόντος υπέστη δύο διαδοχικές αυξήσεις. Αν η συνολική αύξηση είναι 15% και η πρώτη αύξηση ήταν 5%, τότε το ποσοστό της δεύτερης αύξησης με ακρίβεια δεκάτου ήταν :

- α) 7,5% β) 9,5% γ) 3,5% δ) 20,5%

229. Το πλήθος των ανδρών που εργάζονται σε μία τράπεζα προς το πλήθος των γυναικών που εργάζονται στην ίδια τράπεζα είναι $\frac{3}{5}$. Το ποσοστό των ανδρών που εργάζονται στην τράπεζα αυτή είναι :

- α) 45% β) 45% γ) 37,5% δ) 60%

230. Τρεις έμποροι ίδρυσαν μια εταιρεία και έβαλαν από 12.000 ευρώ ο καθένας. Τα χρήματα του πρώτου εμπόρου έμειναν στην επιχείρηση δύο χρόνια, τα χρήματα του δεύτερου εμπόρου έμειναν δυόμισι χρόνια και τα χρήματα του τρίτου έμειναν για τέσσερα χρόνια. Μετά από 4 χρόνια λειτουργίας τα κέρδη της επιχείρησης ήταν 50.000 ευρώ . Να βρεθεί ποιο ήταν το μερίδιο του καθένα από τα κέρδη;

231. Δύο αγρότες καλλιέργησαν μαζί μια έκταση 30 στρεμμάτων που ανήκει στον πρώτο αγρότη κατά τα — και το υπόλοιπο στον δεύτερο αγρότη. Τα έξοδα της καλλιέργειας ανήλθαν σε 1.600.000 δρχ. και τα συνολικά έσοδα από την πώληση των προϊόντων ήταν 4.600.000 δρχ. Πόσο είναι το μερίδιο του καθένα από τα κέρδη;

232. Ο παππούς μοίρασε στα εγγόνια του ένα χρηματικό ποσό ως εξής : Ο

Γιάννης πήρε το $\frac{1}{4}$ του ποσού , η Ελένη τα $\frac{2}{5}$ από αυτά που έμειναν , ο

Θανάσης τα $\frac{2}{3}$ από το νέο υπόλοιπο και ο Πέτρος τα υπόλοιπα . Ο Πέτρος

τελικά πήρε 600 ευρώ . Να βρείτε πόσα ευρώ ήταν όλο το ποσό και τι ποσό πήρε ο καθένας .

233. Η Ράνια αγόρασε μία τούρτα και έφαγε το $\frac{1}{4}$ της τούρτας η ίδια , έδωσε το $\frac{1}{3}$ στην αδελφή της και το $\frac{1}{6}$ στην μητέρα της . Το υπόλοιπο το μοίρασε σε τρεις φίλες της . Αν το κομμάτι της κάθε φίλης της ήταν 100 γραμμάρια , τότε να βρείτε πόσα γραμμάρια από την τούρτα έφαγε το κάθε άτομο στα οποία τη μοίρασε .

234. Να υπολογισθούν οι παραστάσεις :

$$A = (3^3 + 3) \cdot (2^3 - 7) + (2^3 + 2) \cdot 2 + (3^3 - 3 \cdot 7)$$

$$B = (9^2 - 4) : (5,5 \cdot 2) + 63 : (11,3 - 2,3) .$$

Στη συνέχεια να βρείτε τον Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π των αριθμών Α και Β .

235. Αγοράσαμε μία τυρόπιτα , δύο πορτοκάλια και μία τσίχλα και δώσαμε 3,6 ευρώ . Αν η τυρόπιτα αξίζει τριπλάσια από την τσίχλα και η πορτοκαλάδα διπλάσια από την τσίχλα , να βρείτε πόσο κοστίζει το κάθε ένα προϊόν .

236. Ο Πέτρος έχει 5 τηλεοράσεις συνολικής αξίας 2.000 ευρώ . Πούλησε τις δύο στον Γιώργο με κέρδος 25% , τις άλλες δύο τις πούλησε στον Σταμάτη με κέρδος 30% και την τελευταία στον Δημήτρη με κέρδος 10% .

α) να βρείτε πόσα χρήματα εισέπραξε

β) αν από τα χρήματα που εισέπραξε το $\frac{1}{4}$ το έδωσε στην εφορία να βρείτε πόσα χρήματα του απέμειναν .

237. Τέσσερις διαδοχικές γωνίες έχουν άθροισμα 360° . Αν η πρώτη γωνία είναι 60° , η δεύτερη γωνία είναι τριπλάσια από την τρίτη και η τέταρτη γωνία είναι ίση με 80° , να υπολογίσετε την δεύτερη και την τρίτη γωνία .

238. Να υπολογισθούν οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων :

α) $A = \chi^2 - \psi^2 + 3\chi\psi z$, όταν $\chi = 2$, $\psi = 3$ και $z = 4$
β) $B = \chi^2\psi - \chi\psi^2 + (\chi\psi)^2$, όταν $\chi = 2$, $\psi = 3$.

239. Να βρεθεί ο μικρότερος φυσικός αριθμός ο οποίος όταν διαιρεθεί με καθένα από τα κλάσματα $\frac{8}{15}$, $\frac{9}{16}$ και $\frac{12}{17}$ να δίνει ακέραιο πηλίκο .

240. Ο πληθυσμός μιας πόλης αυξάνεται κάθε χρόνο κατά 20% .Αν στο τέλος του 2007 ο πληθυσμός της πόλης ήταν 104.000 κάτοικοι , να βρεθεί ποιος ήταν ο πληθυσμός της πόλης στο τέλος του 2004 .

241. Τρεις ποδηλάτες ξεκινούν συγχρόνως από την αφετηρία ενός κυκλικού στίβου. Εάν οι χρόνοι που απαιτούνται για καθένα από αυτούς για να διανύσουν το κυκλικό στίβο είναι 2 ,3 ,4 λεπτά αντίστοιχα , τότε να βρεθεί
α) μετά από πόσα λεπτά θα συναντηθούν και πάλι στην αφετηρία και
β) πόσες φορές ο καθένας τους θα έχει διανύσει το στίβο;

242. Η Μαρία λέει στο Νίκο : «Να βρεις πόσους συμμαθητές έχω , αν σου πω ότι το πλήθος των μαθητών του τμήματός μου είναι ένας αριθμός μεταξύ του 20 και του 30 και όταν παρατασσόμαστε κατά δυάδες, τριάδες ή τετράδες περισσεύω πάντα εγώ».

243. Ένας ανθοπώλης διαθέτει 20 άσπρα, 30 κόκκινα και 40 κίτρινα τριαντάφυλλα. Θέλει δε να φτιάξει ομοιόμορφες ανθοδέσμες. Να βρείτε πόσες ανθοδέσμες μπορεί να φτιάξει και πόσα συνολικά τριαντάφυλλα θα έχει η κάθε ανθοδέσμη.

244. Η Ασπασία ξόδεψε για την αγορά ενός βιβλίου το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων της, και της απέμειναν 32 €. Να βρείτε πόσα χρήματα είχε και πόσο κόστισε το βιβλίο που αγόρασε .

245. Η οικογένεια του Νίκου ξοδεύει το 15% των μηνιαίων εσόδων για ενοίκιο, το 50% για τρόφιμα, το 10% για ψυχαγωγία και το 10% για μετακινήσεις και μικροέξοδα. Εάν απομένουν κάθε μήνα 450 €, να βρείτε τα μηνιαία έσοδα της οικογένειας.

246. Σε μία πόλη οι κάτοικοι που μπορούν να εργασθούν είναι 15000 . Από αυτούς όμως το 10% είναι άνεργοι, ενώ το 16 % από αυτούς που εργάζονται στην ίδια εταιρεία και κάνουν παρόμοια εργασία, υπεραπασχολούνται εργαζόμενοι υπερωριακά κατά μία ώρα την ημέρα. Να βρεθεί
α) πόσοι από τους άνεργους θα απασχοληθούν, εάν σταματήσει η υπερωριακή απασχόληση και
β) το νέο ποσοστό ανεργίας.

247. Εάν έμπορος αγόρασε 500 κιλά φρούτων προς 1 € το κιλό. Κατά την μεταφορά τους όμως που του κόστισε 50 € καταστράφηκε το 20% των φρούτων. Να βρεθεί πόσο πρέπει να πουλήσει τα υπόλοιπα ώστε να κερδίσει 10% επί του κόστους αγοράς και να εισπράξει και τα έξοδα μεταφοράς.

248. Οι γωνίες Γ , B και A ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 1, 2 και 3 αντίστοιχα .Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου .

249. Στο πάρτι της Ελένης πήγαν συνολικά 7 αγόρια. Τα κορίτσια που πήγαν στο πάρτι ήταν περισσότερα από τα αγόρια. Δύο από τα κορίτσια μαζί με τους συνοδούς τους έφυγαν γρήγορα. Αργά το βράδυ ένα αγόρι και τρία κορίτσια ήταν οι τελευταίοι που πήγαν στο σπίτι της Ελένης. Φτάνοντας δε εκεί βρήκαν δυο κορίτσια πιο πολλά από τα αγόρια. Πόσα κορίτσια πήγαν στο πάρτι της Ελένης; (Η Ελένη δεν έχει αδέρφια)

250. Στη γιορτή του ο Κώστας δέχθηκε δώρα από τους φίλους του. Τα τρία πρώτα δώρα που πήρε προέρχονταν από κορίτσια. Δύο από τα αγόρια που ήρθαν στη γιορτή δεν του έφεραν δώρα , ενώ δύο από τα κορίτσια του έφεραν διπλό δώρο το καθένα. Όταν έφτασε στη γιορτή και το τελευταίο

αγόρι που ήταν και ο τελευταίος επισκέπτης, υπήρχαν ήδη εκεί άλλα τρία αγόρια και το δώρο του ήταν το έβδομο που δέχτηκε ο Κώστας.

Να βρείτε

A) πόσα κορίτσια έφεραν δώρα στον Κώστα ;

B) πόσα δώρα έφερε το κορίτσι που ήρθε τελευταίο ;

251. Μια κατσικά αν αρμεχτεί τρεις φορές την ημέρα, δίνει 0,5 κιλό γάλα το πρωί, 1 κιλό το μεσημέρι και 1,5 κιλό το βράδυ. Αν αρμεχτεί μόνο βράδυ δίνει 2 κιλά γάλα. Να βρείτε πόσα κιλά γάλα θα δώσει

α) αν αρμεχτεί μόνο μεσημέρι και βράδυ

β) αν αρμεχτεί μόνο πρωί και βράδυ

252. Η τσίτα η μαϊμού τρώει μόνο μπανάνες που τις κόβει η ίδια ανεβαίνοντας στα μπανανόδεντρα. Σήμερα ανέβηκε σε τρία μπανανόδεντρα για να κόψει μπανάνες. Στο πρώτο μπανανόδεντρο υπήρχαν 3 μπανάνες πιο λίγες από ότι στο δεύτερο, ενώ στο τρίτο υπήρχαν περισσότερες μπανάνες από ότι στο πρώτο. Η τσίτα έκοψε αρκετές από τις μπανάνες του προπου δέντρου και άφησε επάνω στο δέντρο 6 μπανάνες. Από το δεύτερο δέντρο έκοψε 8 από τις μπανάνες του ενώ από το τρίτο έκοψε όλες τις μπανάνες εκτός από 1. Αν στο δεύτερο δέντρο υπήρχαν 18 μπανάνες, από πιο δέντρο η μαϊμού έκοψε τις λιγότερες μπανάνες;

253. Τρεις φίλοι αγόρασαν μαζί ένα λαχείο αξίας 1600δρχ . Ο πρώτος έδωσε 700 δρχ., ο δεύτερος 400 δρχ. και ο τρίτος 500 δρχ. Αν το λαχείο κέρδισε 4.000.000 δρχ. , να βρεθεί το μερίδιο από τα κέρδη που πρέπει να πάρει καθένας από τούς τρεις φίλους.

254. Τρεις εργάτες τελείωσαν μια εργασία και πήραν 2.400.000 δρχ . Ο Α ως επικεφαλής του συνεργείου πήρε το 20% του ποσού για τη χρήση μηχανημάτων και τα υπόλοιπα χρήματα τα μοιράστηκαν. Αν το ημερομίσθιο του Α είναι 5.000 δρχ , του Β είναι 4.000 δρχ. και του Γ είναι 7.000 δρχ. και εργάστηκαν όλοι τους τον ίδιο χρόνο, να βρεθεί ποσά χρήματα πήρε ο καθένας τους .

255. Τέσσερις έμποροι ιδρύουν μια επιχείρηση και συμμετέχουν με κεφάλαια 3.000,000 δρχ . 5.000 000 δρχ , 6.500.000 δρχ. και 8.000 000 δρχ. Αν η επιχείρηση στο τέλος του χρόνου είχε κέρδη 13.800 000 δρχ., να βρεθεί το μερίδιο καθενός από τα κέρδη της επιχείρησης.

256. Ένα χρηματικό έπαθλο 600.000 δρχ. μοιράστηκε στους τρεις πρώτους νικητές ενός διαγωνισμού ανάλογα με τις σωστές απαντήσεις που έδωσε ο καθένας . Ο Α απάντησε σωστά σε 16 ερωτήσεις, ο Β σε 14 και ο Γ σε 10. Να βρεθεί πόσα χρήματα πήρε ο καθένας .

257. Τρεις ένοικοι μιας πολυκατοικίας επισκεύασαν το χώρο του κλιμακοστασίου και πλήρωσαν 67.000 δρχ. Να βρεθεί τι μέρος από τα έξοδα πρέπει να πληρώσει ο καθένας, αν το διαμέρισμα του Α ενοίκου είναι 45m^2 του Β ενοίκου 52m^2 και του Γ ενοίκου 37m^2 και τα έξοδα της επισκευής πληρώνονται ανάλογα με τα m^2 του διαμερίσματος .

258. Ένας πολιτικός μηχανικός κατασκεύασε σε μακέτα ένα κτίριο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με όγκο 1280m^3 . Αν οι διαστάσεις του κτιρίου στη μακέτα έχουν μήκος 32cm , πλάτος 20 cm και ύψος 16cm , να βρείτε τις πραγματικές διαστάσεις του κτηρίου .

259. Δύο φυσικοί αριθμοί που διαφέρουν κατά 2 έχουν άθροισμα 40 . Να εκφράσετε το πρόβλημα με εξίσωση και με διαδοχικές δοκιμές να βρείτε τη λύση του.

260. Οι μαθητές της Α' τάξης γυμνασίου ενός σχολείου μπορούν να τοποθετηθούν σε τετράδες, πεντάδες ή εξάδες χωρίς να περισσεύει κανένας. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει η τάξη, αν γνωρίζετε ότι είναι λιγότεροι από 72.

261. Να βρείτε για ποιους φυσικούς αριθμούς α ισχύει: $E.K.Π.(6, \alpha) = 72$.

286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

262. Αν είναι $\alpha + \beta = 16$ και $\beta + \gamma = 4$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις

1) $A = \alpha + 2\beta + \gamma$

2) $B = 3(\alpha + \gamma) + 6\beta$

263. Αν α, β είναι φυσικοί αριθμοί, να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός $A = 4\alpha + 6\beta$ είναι άρτιος, ενώ ο αριθμός $B = 4(\alpha + 1) + 2\beta - 1 - 2\alpha$ είναι περιττός.

264. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι όταν διαιρεθούν με τον αριθμό 6 δίνουν ηλίκο διπλάσιο του υπολοίπου.

265. Ένα οικόπεδο έχει εμβαδόν 1 στρέμμα και 480m^2 , ενώ ένα άλλο οικόπεδο έχει εμβαδόν $0,11\text{hm}^2$ και $3,5\text{dam}^2$. Ποιο οικόπεδο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;

266. Να βρείτε πόσα λίτρα νερό χωράει μια κυβική δεξαμενή με πλευρά 3m ;

267. Ένας εργάτης τελειώνει ένα έργο σε 9 ημέρες, ένας δεύτερος εργάτης το τελειώνει σε 12 ημέρες και ένας τρίτος εργάτης σε 18 ημέρες. Σε πόσες ημέρες θα τελειώσουν και οι τρεις μαζί το έργο.

268. Αν από 100Kg γάλα παίρνουμε 8Kg βούτυρο, τότε να βρείτε

α) από 350Kg γάλα πόσο βούτυρο θα πάρουμε;

β) για να πάρουμε $4,5\text{Kg}$ βούτυρο πόσο γάλα χρειαζόμαστε;

269. Αν είναι $\chi = 0,2$ και $\gamma = 1,5$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις

α) $A = 35\chi - 6\psi + \chi \cdot \psi$

β) $B = 7(\chi + \psi) - 7\psi - \chi$

γ) $\Gamma = (\chi + \psi)^2 - \chi(5 - \psi)$

270. Αν είναι $\chi + \psi = 8$, να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = (\chi + \gamma)\chi + (3^2 - 2^3)\chi + 3^2\psi$$

271. Αν είναι $\chi = 2$ και $\psi = 7$ και $\omega = 3$ να υπολογίσετε τα A και B όταν :

$$A = \chi^2 + \psi^2 + \omega^2 \quad , \quad B = (\psi - \chi)^\omega$$

272. Κατέθεσε κάποιος στην τράπεζα 650.000δρχ. με επιτόκιο 18%. Πόσα χρήματα θα πάρει μετά από ένα χρόνο, αν οι τόκοι φορολογούνται με 10%.

273. Τα τέσσερα παιδιά μιας οικογένειας μοιράστηκαν 30.000 ευρώ ανάλογα με την ηλικία τους. Αν τα παιδιά είναι 8, 9, 11 και 12 ετών, να βρείτε πόσα ευρώ πήρε το καθένα ;

274. Αν τα 5 κιλά κρασί κοστίζουν 1650δρχ , να βρείτε

- 1) πόσο κοστίζουν τα 12 κιλά κρασί ;
- 2) με 6.930 δρχ. πόσα κιλά κρασί αγοράζουμε ;

275. Να σχεδιάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κάθετες διαγώνιους. Από τις κορυφές του Α και Γ να φέρετε παράλληλες προς τη διαγώνιο ΒΔ και από τις κορυφές του Β και Δ παράλληλες προς την διαγώνιο ΑΓ. Τι σχήμα είναι το νέο τετράπλευρο που σχηματίζεται ; Να αιτιολογήστε την απάντησή σας .

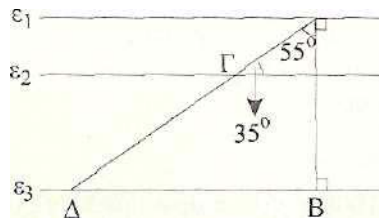
276. Να χαράξετε δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 που να απέχουν μεταξύ τους 3cm . Να σχεδιάσετε έναν κύκλο που να εφάπτεται στις δύο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 .

277. Να σχεδιάσετε έναν κύκλο (Ο, Κ) και να φέρετε μια διάμετρο του ΑΒ και μια ακτίνα του ΟΓ. Να διαπιστώσετε ότι $\hat{ΟΑΓ} = \hat{ΟΓΑ}$ και $\hat{ΟΒΓ} = \hat{ΟΓΒ}$ και να το αιτιολογήσετε .

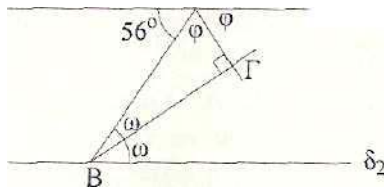
278. Στο σχήμα να εξηγήστε γιατί είναι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \parallel \epsilon_3$.

A

286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης



279. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\delta_1 \parallel \delta_2$. Να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.



280. Να γράψετε δύο κύκλους (Λ, Κ) και (Κ, Κ.) που να τέμνονται στα σημεία Α και Β. Να εξηγήσετε γιατί είναι $\widehat{\Lambda\hat{A}K} = \widehat{A\hat{B}K}$ και $\widehat{A\hat{L}B} = \widehat{A\hat{K}B}$.

281. Να κατασκευάσετε με τον κανόνα και το διαβήτη :

- 1) Ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ πλευράς $\alpha = 3\text{cm}$
- 2) τη διχοτόμο ΑΕ της γωνίας του Α.

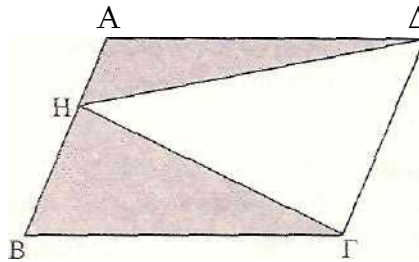
282. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με περίμετρο 36cm και η πλευρά AB είναι 9cm. Να εξηγήσετε γιατί το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

283. Να εξηγήσετε γιατί η διαγώνιος ενός παραλληλογράμμου χωρίζει το παραλληλόγραμμο σε δύο τρίγωνα που έχουν το ίδιο εμβαδόν.

284. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και ΑΔ και ΒΕ τα ύψη του. Να εξηγήσετε γιατί ισχύει η ισότητα $A\Delta \cdot B\Gamma = B\text{E} \cdot A\Gamma$.

286 Ασκήσεις Α Γυμνασίου
Σωκράτης Ρωμανίδης

285. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Η τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΒ. Να δείξετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΗΔΓ .



286. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Η το μέσο της πλευράς ΑΒ. Αν E_1 είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΗΑΔ και Ε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ να αποδείξετε ότι $E_1 = \frac{1}{4} E$.