

4

Άλγεβρα

Στοιχεία Συναρτήσεων

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$

β. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x + 8}$

γ. $g(x) = \frac{3-x}{(x+6)(2x-5)}$

δ. $g(x) = \frac{x-1}{x^2 - 4}$

ε. $h(x) = \sqrt{4-x}$

στ. $h(x) = \sqrt{2x-4}$

ζ. $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 1}$

η. $\varphi(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 5}$

θ. $r(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{1-x}{\sqrt{x+2}}$

ι. $r(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} + \frac{2}{\sqrt{x+2}}$

2. Στις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθούν τα $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$ και $f(2)$:

α. $f(x) = 2x^2$

β. $f(x) = 2x^2 - 1$

γ. $f(x) = -2x^2$

δ. $f(x) = -2x^2 - 1$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $2f(x+1) - f(x-1) = -6$

4. Αν $f(x) = \frac{6}{x}$ και $g(x) = 2x - 1$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α. $A = f(2) \cdot g(1) - f(-3) \cdot g\left(\frac{-5}{2}\right)$

β. $B = \frac{2}{f(-1)} - \frac{3}{2} \cdot g\left(\frac{-1}{4}\right)$

5. Ένας πλασιέ βιβλίων παίρνει ημερομίσθιο 30 € και για κάθε βιβλίο που πουλάει άλλο 1 €. Να εκφράσετε το ημερομίσθιο του ως συνάρτηση του αριθμού των βιβλίων που πουλάει.

6. Μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $M(2, 7)$. Να βρεθεί η συνάρτηση που έχει για γραφική παράσταση την ευθεία αυτή.

7. Δίνεται η συνάρτηση : $y = \frac{x^2 - x}{x - 1}$

α. Να βρείτε για ποιές τιμές του x ορίζεται.

β. Για τις τιμές αυτές να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ. Να κάνετε την γραφική της παράσταση.

8. Δίνεται η συνάρτηση : $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ. Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

9. Αν $-1 \leq x < 4$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η συνάρτηση :

α. $y = -2x + 7$

β. $y = \frac{2}{x+3}$

10. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρουν οι παρακάτω συναρτήσεις :

α. $y = -3x - 5, -1 \leq x \leq 3$

β. $y = \frac{1}{3x+2}, 2 \leq x \leq 6$

11. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 6$. Για ποιες τιμές του x είναι :

α. $f(x) = x$

β. $f(x) = f(-x)$

γ. $f(x) = f(x+1)$

δ. $f(x) = -5$

12. Αν $f(x) = \alpha \cdot x$ να δείξετε ότι :

α. $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

β. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

γ. $f(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$

13. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - \lambda x + 4}{(x-1)^2}$. Να βρεθεί το λ , ώστε η συνάρτηση να διέρχεται από το σημείο $(2, 10)$.

14. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{(2\lambda - 3)x + 2\lambda + 2}{x-1}$. Να βρείτε το λ αν η γραφική της παράσταση διέρχεται απ' το σημείο $M(2, 14)$.

Παράβολη

Γραφικές Παραστάσεις

15. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 3x + 2$ και να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης και τον άξονα συμμετρίας της.

16. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x^2 + x + 1$

α. Σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα $x'x$;

β. Σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα $y'y$;

γ. Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της παραβολής ;

δ. Ποια είναι η κορυφή της παραβολής ;

ε. Να γίνει η γραφική παράσταση.

17. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

α. Σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα $x'x$;

β. Σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα $y'y$;

γ. Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της παραβολής ;

δ. Ποια είναι η κορυφή της παραβολής ;

ε. Να γίνει η γραφική παράσταση.

18. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ. Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

δ. Να βρεθεί ο άξονας συμμετρίας της.

19. Να σχεδιάσετε την παραβολή $y = a \cdot x^2$ αν αυτή διέρχεται από το σημείο:

α. $A(2, -6)$

β. $B(-1, 4)$

20. Να σχεδιάσετε την παραβολή $y = a \cdot x^2 + \beta$ αν αυτή διέρχεται από το σημείο $A(2, 2)$ και την αρχή των αξόνων.

21. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 + a \cdot x + \beta$, αν γνωρίζετε ότι διέρχεται από το σημείο $(1, 3)$ και από την αρχή των αξόνων.

22. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = a \cdot x^2 + \beta$, αν είναι γνωστό ότι διέρχεται απ' τα σημεία $A(0, 2)$, $B(1, 1)$.

Κορυφή & Ακρότατα

23. Αν είναι γνωστό ότι η παραβολή $y = x^2 + kx + \lambda$ διέρχεται από τα σημεία $O(0, 0)$ και $A(1, 4)$, τότε :

α. Να υπολογίσετε τα k, λ .

β. Σε ποια σημεία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$;

γ. Παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο και σε ποιο σημείο;

δ. Ποια ευθεία αποτελεί άξονα συμμετρίας της παραβολής;

24. Δίνεται η παραβολή $y = \left(\frac{\alpha-1}{2} - 3\right) \cdot x^2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η παραβολή έχει ελάχιστο.

25. Δίνεται η παραβολή $y = \left(\frac{\kappa-1}{2} - \frac{2\kappa-3}{3}\right) \cdot x^2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του κ η παραβολή έχει μέγιστο.

26. Δίνεται η παραβολή $y = (2\lambda - 1)x^2 - 3x + 7$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ έχει μέγιστο.

27. Για ποια τιμή του λ η συνάρτηση $y = 2x^2 - 2(2\lambda + 1)$ έχει γραφική παράσταση παραβολή, με κορυφή την αρχή των αξόνων;

28. Να βρεθεί ο λ ώστε η συνάρτηση :

$$y = \frac{3}{2}x^2 - 7\left(2\lambda + \frac{\lambda - 11}{5}\right)$$

να έχει γραφική παράσταση παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων.

29. Δίνεται η παραβολή $y = \left(\frac{1-3\alpha}{6} - 1\right) \cdot x^2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

30. Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2 - 2kx + k^2 + k + 1$. Να βρείτε τον k αν η συνάρτηση έχει ελάχιστο τον αριθμό -4 . Στη συνέχεια, να βρείτε την κορυφή της.

31. Να βρείτε το μέγιστο ή ελάχιστο και την κορυφή των συναρτήσεων :

α. $f(x) = x^2 - 2x$

β. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

γ. $y = -x^2 + 2x + 8$

32. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε οι εξισώσεις $y = (\lambda - 1)x^2$ και $y = (2\lambda + 3)x^2$ να παριστάνουν παραβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

Διάφορες

33. Για ποιές τιμές των λ, k η παραβολή $y = (\lambda - 1)x^2 - 5x + 2k - 6$ διέρχεται από τα σημεία $\Delta(1, 2)$ και $E(0, 6)$.

- 34.** Δίνεται η παραβολή : $y = x^2 + kx + \lambda$
- α.** Να βρείτε τους k, λ αν είναι γνωστό ότι τα σημεία $O(0, 0)$ και $A(4, 4)$ βρίσκονται πάνω στην γραφική παράσταση της παραβολής.
 - β.** Ποιά η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από την κορυφή της παραπάνω παραβολής;
-

- 35.** Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής η οποία έχει κορυφή το $O(0, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(2, -8)$. Στη συνέχεια, να βρεθεί η εξίσωση της συμμετρικής της, ως προς τον άξονα $x'x$, και να γίνει η γραφική της παράσταση για $-5 \leq x \leq -3$.
-

- 36.** Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο 12 και μήκος x .
- α.** Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x .
 - β.** Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.
 - γ.** Πότε το ορθογώνιο έχει μέγιστο εμβαδόν;
-

- 37.** Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές με αντίστοιχα μήκη : x και $4 - x$
- α.** Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x .
 - β.** Να βρείτε την μέγιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου.

