

# 1

# Άλγεβρα<sup>1.4</sup>

## Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

### Περιορισμοί

1. Για ποιες τιμές του  $x$  έχουν έννοια οι παραστάσεις :

α.  $\frac{2x+7}{x-3}$

β.  $\frac{2}{3x-5}$

γ.  $\frac{3-x}{5x+25}$

δ.  $\frac{4x-1}{1-3x}$

ε.  $\frac{1}{x^2-9}$

στ.  $\frac{-2}{\alpha x - \alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

ζ.  $\frac{3x+11}{x^2-3x}$

η.  $\frac{x-y}{x^3-4x^2}$

θ.  $\frac{12x^2+3y}{x^2-7x}$

ι.  $\frac{1}{x^2-2x+1}$

ια.  $\frac{1}{x^2-5x+6}$

ιβ.  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+1}$

ιγ.  $\frac{5x-y}{(x-y)^2}$

ιδ.  $\frac{3y-4}{(y-3)(1-2y)}$

ιε.  $\frac{2x+5y}{2x-7y}$

ιστ.  $\frac{x-y}{(2x-1) \cdot (3x-y)}$

## Απλοποίηση

2. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα :

α.  $\frac{5xy}{20x^2}$

β.  $\frac{6\alpha^2\beta}{2\alpha^3\beta\gamma^2}$

γ.  $\frac{6(x-y)^3}{(x-y)^2}$

δ.  $\frac{4\alpha - 4\beta}{8\alpha - 8\beta}$

ε.  $\frac{5y - 10}{y^2 - 2y}$

στ.  $\frac{2\beta - 4}{\beta^2 - 2\beta}$

ζ.  $\frac{3x - 6}{4 - x^2}$

η.  $\frac{x^3 - x}{x^2 + x}$

θ.  $\frac{4\alpha^3 - 16\alpha}{2\alpha^3 + 4\alpha^2}$

ι.  $\frac{2x^2 - 6x}{2x^2 - 18}$

3. Ομοίως :

α.  $\frac{x^2 + 4x + 4}{3x^2 - 12}$

β.  $\frac{xy - x}{y^2 - 2y + 1}$

γ.  $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x + 6}$

δ.  $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 8x + 15}$

ε.  $\frac{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta}{\alpha^3\beta - \beta^4}$

στ.  $\frac{x^2 + 10x + 25}{3x^2 - 75}$

ζ.  $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4x + 3}$

η.  $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8}$

θ.  $\frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2}$

ι.  $\frac{x^3 + x^2 + 2x + 2}{x^5 + x^4 - 4x - 4}$

ια.  $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + 2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma}$

ιβ.  $\frac{4x^2 + 4xy + y^2}{4x^3 - xy^2}$

$$\text{ιγ. } \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\text{ιδ. } \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}$$

## Πράξεις

4. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

$$\text{α. } \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x}$$

$$\text{β. } \frac{\alpha}{\alpha+6} - \frac{\alpha}{\alpha-6}$$

$$\text{γ. } \frac{4x}{3x} + \frac{1}{5x^3y}$$

$$\text{δ. } \frac{3}{x^2} - \frac{1}{5xy^2}$$

$$\text{ε. } \frac{x-1}{x+1} - \frac{2}{x} + \frac{x}{x-1}$$

$$\text{στ. } 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$\text{ζ. } \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} - \frac{x}{x-1}$$

$$\text{η. } \frac{x-1}{xy-y^2} - \frac{y}{(x-y)^2}$$

$$\text{θ. } \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} - \frac{x}{x-1}$$

$$\text{ι. } \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x} - \frac{2x}{x+3}$$

$$\text{ια. } \frac{1}{2x-4} - \frac{1}{3x-6} + \frac{x+8}{3x^2-12}$$

$$\text{ιβ. } \frac{2x+4}{x^2-2x} + \frac{3x+2}{x^2+2x} - \frac{6x+4}{x^2-4}$$

$$\text{ιγ. } \frac{1}{\alpha+1} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} - \frac{1}{\alpha-1}$$

$$\text{ιδ. } \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} + \frac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$$

$$\text{ιε. } \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$$

$$\text{ιστ. } \frac{\alpha-2\beta}{\alpha+2\beta} + \frac{\alpha+2\beta}{\alpha-2\beta} - \frac{8\alpha\beta}{\alpha^2-4\beta^2}$$

$$\text{ιζ. } \frac{1}{\alpha^2-\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2+\alpha\beta} - \frac{1}{2\alpha^2-2\alpha\beta}$$

$$\eta. \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - x - 2} + \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\theta. \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 + 4\alpha + 4} + \frac{\alpha - 3}{\alpha^2 + 2\alpha} - \frac{3}{\alpha + 2}$$

$$\kappa. \frac{x+1}{3x-3} - \frac{x-1}{2x+2} + \frac{x^2+11}{6x^2-6}$$

$$\kappa\alpha. \frac{x^{2v}}{x^v - 1} - \frac{x^{2v}}{x^v + 1} - \frac{1}{x^v - 1} + \frac{1}{x^v + 1}$$

5. Ομοίως :

$$\alpha. \frac{2x}{5y^2} \cdot \frac{10xy}{8x^3}$$

$$\beta. \frac{5}{7x} \cdot \left(-\frac{3y}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2x^2}{y^3}\right)$$

$$\gamma. \frac{x+2}{y-4} \cdot \frac{y^2 - xy}{4 - x^2}$$

$$\delta. (x+4) \cdot \frac{x^2 y}{x^2 - 16}$$

$$\epsilon. \frac{x^4(x-1)^3}{4y} \cdot \frac{yx}{2(x-1)^7}$$

$$\sigma\tau. \frac{x^2 - 25}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$$

$$\zeta. \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 7x + 12} \cdot \frac{x+3}{x-3}$$

$$\eta. \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{8x - 8y}$$

$$\theta. \frac{x^4 - x^2 - 4x + 4}{x^3 + 8} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 4x}$$

$$\iota. \frac{\alpha^{2v} - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\alpha^v + 1}$$

6. Ομοίως :

$$\alpha. \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 - \alpha\beta} : \frac{3\alpha + 3\beta}{\alpha - \beta}$$

$$\beta. \frac{20}{\omega^2 - \varphi^2} : \frac{-10}{\varphi - \omega}$$

$$\gamma. \frac{\omega^2 - 9}{\omega + \varphi} : \frac{\omega + 3}{\omega^2 - \varphi^2}$$

$$\delta. \frac{x^2 - 16}{x + 3} : \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$$

$$\epsilon. \frac{x^2 - 9}{4x - 12} : \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\sigma\tau. \frac{5x^3}{4x^2 - 9} : \frac{2x^2 + 6x}{4x^2 - 12x + 9}$$

$$\zeta. \frac{\alpha^2 - \beta^2}{x - y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{\alpha - \beta} : \frac{x + y}{2}$$

$$\eta. \frac{x^2 - 16}{x + 3} : \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$$

$$\theta. \frac{6(2\alpha - x)(x - \alpha)}{25(2x + \alpha)^2} : \frac{10(x - \alpha)^2}{9(2x + \alpha)(2\alpha - x)}$$

7. Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

$$\alpha. \frac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}$$

$$\beta. \frac{x - \frac{y^2}{x^2}}{1 - \frac{y}{x}}$$

$$\gamma. \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2}{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}$$

$$\delta. \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) : \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$\epsilon. \left( \frac{x}{3} + \frac{3}{x} - 2 \right) : \left( \frac{x}{3} - \frac{3}{x} \right)$$

$$\sigma\tau. \left( \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{3}{\alpha - \beta} - \frac{1}{\alpha + \beta} \right) \cdot \left( \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2 \right)$$

$$\zeta. \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right) \cdot \left( \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} \right)$$

$$\eta. \frac{1}{1 + \frac{3}{x}} + \frac{1}{\frac{x}{3} - 1} - \frac{2}{\frac{x}{3} - \frac{3}{x}}$$

$$\theta. \frac{3}{1 + \frac{\alpha}{\beta + \gamma}} + \frac{3}{1 + \frac{\beta}{\gamma + \alpha}} + \frac{3}{1 + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}}$$

$$\iota. \frac{\alpha}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)} + \frac{\gamma}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

$$\iota\alpha. \frac{1}{(\alpha + \beta)^2} - \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{2(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha^2 - \beta^2)^2}$$

$$\text{ιβ.} \quad \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \frac{x^4 - x^3}{x^4 - 1}$$

$$\text{ιγ.} \quad \frac{1}{(x+y)^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{2}{(x+y)^3} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

$$\text{ιδ.} \quad \frac{y}{2} \cdot \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right) + \frac{x^2 - y^2}{x^2y - xy^2} \cdot (x+y)$$

$$\text{ιε.} \quad \left(\frac{x}{y} - 1\right) \left(\frac{x}{y} + 1\right) \left(1 - \frac{x^2}{x^2 - y^2}\right)$$

$$\text{ιστ.} \quad \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) : \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) : \left(1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$$

$$\text{ιζ.} \quad \frac{1}{x^3 - x^2y - xy^2 + y^3} + \frac{2}{x^2 - y^2} - \frac{3}{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$$

---

## Διάφορες

8. Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A = (x+1)^2 - x(x+1) \quad \text{και} \quad B = \frac{x^2 - 4}{3x - 6}$$

- α. Να κάνετε τις πράξεις στην παράσταση A.
- β. Να απλοποιήσετε την παράσταση B.
- γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα A + B.

---

9. Δίνεται το παρακάτω κλάσμα :

$$\frac{(x^2 + 3x + 1)^2 - 1}{x^3 - 9x}$$

- α. Να παραγοντοποιήσετε τους όρους του.
  - β. Να το απλοποιήσετε.
  - γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα η παράσταση.
-

10. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός :

$$\frac{333334 \cdot 666663 \cdot 333331 + 333327}{333333^2}$$

είναι ακέραιος. Ποιος είναι ο ακέραιος αυτός;

(Υπόδειξη: Ονομάστε  $333333 = x$ )

---

11. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός :

$$A = 1998^2 - 1997^2 + 1996^2 - 1995^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$

είναι πολλαπλάσιο του 1999.

---

12. Αν για τους μη μηδενικούς αριθμούς  $a, \beta, x, y$  ισχύει ότι  $ay = \beta x$ , να αποδείξετε ότι η παράσταση :

$$A = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

είναι ίση με τη μονάδα.

---

13. Να αποδείξετε την ισότητα :  $\frac{x^{10}}{x^5 - 1} - \frac{x^{10}}{x^5 + 1} - \frac{1}{x^5 - 1} + \frac{1}{x^5 + 1} = 2$

---

14. Να αποδείξετε την ισότητα :  $\frac{x^v}{x^v + 1} + \frac{1}{x^v - 1} - \frac{2}{x^{2v} - 1} = 1$

---

15. Δίνονται τα κλάσματα :  $A = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x}$  και  $B = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4}$

**α.** Να καθορίσετε τα πεδία ορισμού των κλασμάτων A και B .

**β.** Να υπολογίσετε την παράσταση  $A - B$ .

---

16. Αν είναι  $x = 3\sqrt{2} - 2$  και  $y = 3\sqrt{2} + 2$  τότε να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\frac{x^2 \cdot y^2}{x \cdot y}$$

